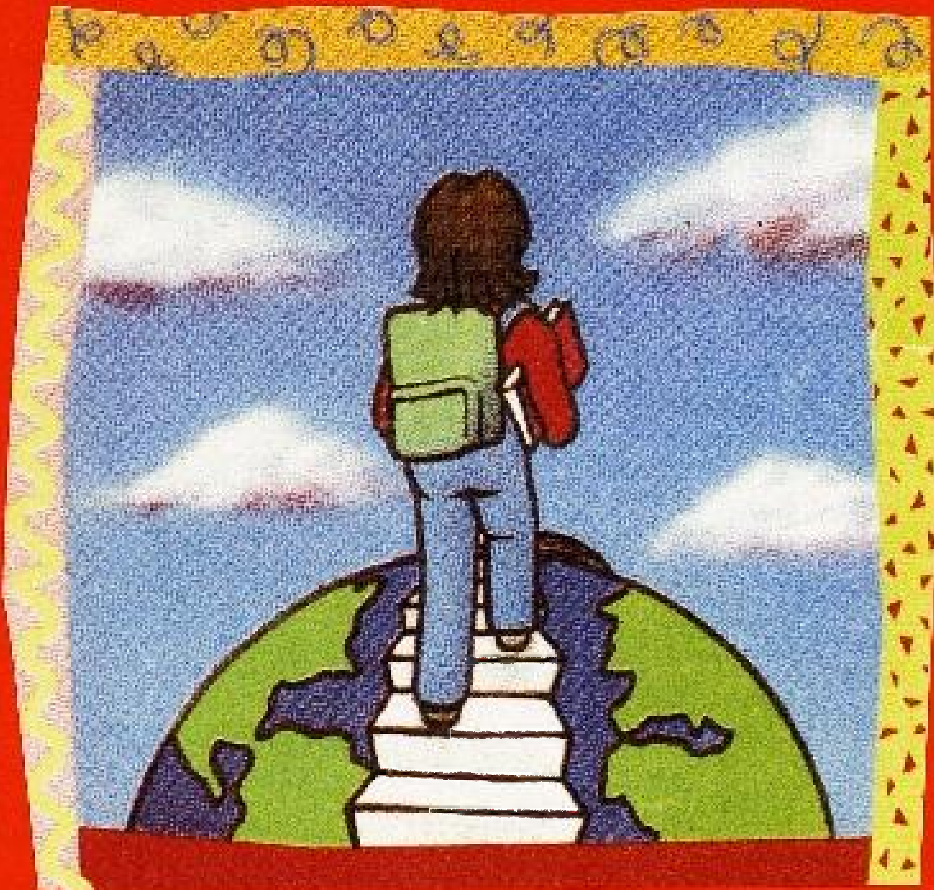
Biblioteka "Korak po korak"



Vesna Vlahović-Štetić
Vlasta Vizek Vidović

KLADIM SE DA MOŽEŠ....

- psihološki aspekti početnog poučavanja matematike -

PRIRUČNIK ZA UČITELJE

POU KORAK PO KORAK

POU KORAK PO KORAK

Udruga roditelja “Korak po korak”

Vesna Vlahović-Štetić i Vlasta Vizek Vidović

KLADIM SE DA MOŽEŠ....

psihološki aspekti početnog poučavanja matematike

Zagreb, 1998.

Izdavač

Udruga roditelja "Korak po korak"

Za izdavača

Mira Kunstek, prof.

Urednik

Gorana Hitrec, prof.

Recenzenti

Prof. dr. sc. Mira Čudina-Obradović
Prof. dr. sc. Mirko Polonijo

Ilustrator

Goran Sudžuka

Lektor

Majda Kunstek

Tisak

Zrinski d.d., Čakovec

Naklada

600 primjeraka

CIP - Katalogizacija u publikaciji
Nacionalna i sveučilišna knjižnica, Zagreb

UDK 371.32.015.3:51

VLAHOVIĆ-Štetić, Vesna
Kladim se da možeš --- : psihološki aspekti početnog poučavanja matematike / Vesna Vlahović-Štetić, Vlasta Vizek Vidović. - Zagreb : Udruga roditelja Korak po korak, 1998. - 85 str. : ilustr. ; 24 cm

Bibliografija: str. 83-85

ISBN 953-97494-1-7

1. Vizek Vidović, Vlasta

980924022

Predgovor urednice

Ovaj priručnik prvi je naslov iz Biblioteke "Korak po korak", koju pokreće istoimena Udruga roditelja, namijenivši je prvenstveno učiteljima i odgajateljima trajno usmjerenima ka stručnom i osobnom usavršavanju. Biblioteka je logična posljedica primjene Projekta "Korak po korak" u Hrvatskoj čiji su bitni ciljevi:

- poticanje djetetove motivacije za cjeloživotno učenje,
- razvijanje okoline za učenje temeljene na međusobnom poštovanju i demokratskim načelima,
- poštivanje razvojnog kontinuiteta i korištenje razvojno primjerenih metoda, te
- razvijanje raznolikih vještina u djece kako bi sutra uspješno sudjelovala u životu demokratskog društva.

Projekt "Korak po korak" međunarodni je projekt koji su 1994. započeli Institut Otvoreno društvo i Children's Resources International, nevladina udruga iz Washingtona, s namjerom pomaganja promjene obrazovnih sustava u bivšim socijalističkim zemljama ka demokratskom obrazovanju. Svaka zemlja sudionica ima punu slobodu prilagođavati Projekt svojim obrazovnim tradicijama i standardima.

Programi razvijeni u okrilju projekta "Korak po korak" odnose se na metode poučavanja djece od dojenačke dobi do 10-te godine, a uspjeh i popularnost koju su stekli u zemljama gdje se primjenjuju potakli su autore da ih nastave razvijati i za stariju školsku dob. Ove metode poučavanja polaze od postavki individualnog konstruktivizma J. Piageta, socijalnog konstruktivizma L.S. Vygotskog, Brunerove spoznaje o važnosti govora za mišljenje, Deweyeve spoznaje o važnosti aktivnosti i spoznaje M. Montessori o razvijanju djetetove nezavisnosti i samoutjecajnosti putem samostalnog odlučivanja. U njih su ugrađene i nove spoznaje o razvoju i funkcioniranju mozga te postavke razvojno primjerenog kurikuluma.

Projekt u Hrvatskoj, baš kao i u ostalih 25 zemalja gdje se provodi, okuplja učitelje entuzijaste, koji stalno propitujući efikasnost svog poučavanja i tragajući za boljim pristupom djeci, postaju i sami cjeloživotni učenici. Ali ne samo njih! Projekt angažira i naše istaknute znanstvenike sa željom da i mi u Hrvatskoj pronađemo što efikasniju primjenu postavki i ideja suvremene psihologije i pedagogije, koje se danas u svijetu smatraju optimalnima za proces učenja i poučavanja, i u našoj odgojno-obrazovnoj praksi. Ovaj priručnik rezultat je upravo takvog angažmana naših uglednih psihologinja doc. dr. Vesne Vlahović-Štetić i prof. dr. Vlaste Vizek-Vidović, koje se bave psihološkim aspektima početnog poučavanja matematike.

Angažiranje psihologa da nešto kažu o poučavanju matematike iskaz je naše želje da potaknemo interdisciplinarno promišljanje različitih problema vezanih uz proces učenja i poučavanja, od kreiranja nastavnih programa do izrade djeci primjerenih udžbenika, od osmišljavanja razvojno primjerenih postupaka do primjene razvojno primjerenih didaktičkih materijala.

Programi "Korak po korak" vide dijete kao aktivnog pojedinca koji konstruira, mijenja i integrira svoje razumijevanje svijeta kroz međudjelovanje s fizičkim svijetom, raznim materijalima i drugom djecom. Polazeći od ove osnovne premise, logično je i učenje matematike promatrati kao aktivan proces, u kome djeca istražuju, konstruiraju, primjenjuju, ispituju, dokazuju, predstavljaju, rješavaju, raspravljaju, opisuju, razvijaju, predviđaju, dakle aktivna su mentalno i fizički. Najvažniji je rezultat tog procesa razumijevanje matematičkih odnosa, a tek potom učenje strategija i matematičkih algoritama. Do razumijevanja generalizacija i apstrakcija, koje su neodvojiv dio učenja, djeca mogu doći samo konkretnim iskustvom s mnogim pomoćnim sredstvima i aktivnostima.

Upravo u ovom priručniku autorice prikazuju takve aktivnosti uz pomoć konkretnog materijala, tzv. temeljnih kockica. Djeci vizualno privlačne i za manipuliranje jednostavne, temeljne kockice olakšavaju konkretno predstavljanje različitih matematičkih pojmova. Priručnik nastoji učiteljima objasniti i približiti važnost i mogućnost uporabe temeljnih kockica u postizanju što boljeg razumijevanja matematičkih odnosa.

Pokretanje biblioteke "Korak po korak" namijenjene stručnom usavršavanju odgajatelja i učitelja, tek je jedna od brojnih aktivnosti koje je Udruga roditelja pokrenula ili će pokrenuti sa željom da se postignu bitni ciljevi Projekta.

Gorana Hitrec

Predgovor

Već se dulje vrijeme bavimo psihološkim aspektima početnog učenja matematike i vjerujemo da psihologijska istraživanja u ovom području mogu učiteljima i profesorima matematike ponuditi neka nova saznanja.

Stoga smo s radošću prihvatile poziv Udruge roditelja "Korak po korak" da održimo seminare učiteljima. Seminari su bili radioničkog tipa ("red" predavanja, pa "red" vježbi) i moramo priznati da smo stvarno uživale. Jedan od razloga uživanja u radu bio je taj što su učitelji bili sjajni učenici (sve razumiju, sve žele znati, a s disciplinom u razredu nema problema). Drugi razlog zadovoljstvu je činjenica da smo imale priliku prenijeti naša stručna znanja ljudima koji neposredno rade s djecom. Naime, nadamo se da smo im pomogle u razumijevanju dječjih teškoća u matematici i ukazale na načine kako djeci učinkovito pomoći. Nadamo se da smo na taj način posredno pomogle i nekim učenicima u svladavanju vrlo zahtjevnog školskog programa.

Nakon seminara javila se ideja da predavanja oblikujemo u priručnik koji bi mogli koristiti i ostali učitelji. Naravno, nismo odoljele pa smo u ovoj knjizi napisale i nešto više nego što smo na seminarima rekle. Željele smo učiteljima i roditeljima pružiti pogled na matematiku iz perspektive razvojne psihologije, te reći što i kad djeca mogu razumjeti i na koji ih način poučiti. Priručnik ima teorijske dijelove i aktivnosti vezane uz njih. Neke slične aktivnosti mogu se naći i u drugim priručnicima, a neke ne. Sve aktivnosti nastojale smo uobličiti na jednak način koji bi učiteljima dao jasnu informaciju kad i kako tu aktivnost rabiti. Na seminarima su učitelji bili učenici koji su prošli kroz zadatke slažući kockice i rješavajući probleme onako kako je to opisano u aktivnostima. Prije nego krenete u razred budite i Vi učenik, pa isprobajte kako Vama te aktivnosti idu. Veselit će nas da unesete neke promjene, pronađete nove materijale, sami priredite nove aktivnosti (a kladimo se da možete...). Sigurne smo da će to veseliti i Vas i Vaše učenike (ili Vašu djecu).

Vesna Vlahović-Štetić i Vlasta Vizek Vidović

Sadržaj

Ovu knjigu posvećujemo našoj djeci

Marku i Jakši

Uni, Tisi i Raši

POU KORAK PO KORAK

1.

Uvod

Ta teška matematika - psihološki činitelji učenja matematike

1.1. Zašto se djeci čini da je matematika težak školski predmet?

Kad se pogledaju početni udžbenici iz matematike za osnovnu školu stječe se dojam da djecu uvode u neko za njih potpuno novo područje. Učenje aritmetike najčešće počinje brojčanim zadacima u kojima se djeca susreću s izrazima poput "2 + 3 =". Naglo se ulazi u apstraktan svijet brojki i načina obilježavanja odnosa (+ i =). Razgovori s prvoškolcima pokazuju da se oni pri susretu s takvim zadatkom najčešće pitaju: "čega dva" i "čega tri". S druge strane njihovo predškolsko iskustvo u rješavanju svakodnevnih problema omogućava im da bez mnogo teškoća odgovore ne samo na pitanja poput: "Ako imaš pet bombona, a prijateljica te zamoli da joj daš dva koliko će ti ostati?", nego i na pitanja koju uključuju odnose jedan prema više, odnosno podrazumijevaju operaciju množenja: "Koliko ušiju imaju tri zeca?". No, zadatak poput "2 + 3" ih zbunjuje. Jasno se pokazalo da djeca u dobi od 3 ili 4 godine već pokazuju osjetljivost za baratanje s veličinama kao i razmjerno razvijeno intuitivno matematičko razmišljanje (koje se u slabo obrazovanih kasnije razvija u tzv. "praktičnu matematiku").

Učenje aritmetike koje polazi od zadataka vrste "3 + 2" ne nadograđuje se na temelje matematičkog razmišljanja postavljene u ranom djetinjstvu. Počinje se graditi posve novi sustav, a pritom se često odašilje poruka kako je matematika izvan školske učionice "nešto drugo", ponekad i "manje vrijedno" od matematike u školi.

Istraživanja su pokazala da se temeljne matematičke spoznaje razvijaju kroz neposredan dodir s predmetima u djetetovoj okolini ili promatranjem modela koji manipuliraju veličinama (Wood, 1995.). Iako to iskustvo omogućava djeci da bez većih teškoća rješavaju neke matematičke probleme i da izvode neke računske radnje s prirodnim brojevima, isto je tako uočeno da među djecom postoje znatne razlike u načinu na koji su došla do određenih matematičkih spoznaja. Primjerice, neka djeca jače razvijaju vizualno predočavanje koje im pomaže da matematičke probleme pretoče u slike, dok se druga više oslanjaju na jezik, pojmove i odnose među njima. Upravo zbog tih individualnih razlika potrebno je djeci, pri uvođenju u svijet apstraktne matematike, omogućiti što raznovrsniji dodir s konkretnim materijalima, kako bi uspoređujući različita iskustva mogla doći do općenitijih pojmova i spoznaja o prirodi matematike. Matematički postupci i vještine koje se uče izdvojeno iz smislenog konteksta ne mogu se lako primijeniti u stvarnim životnim situacijama koje zahtijevaju matematičko-logičko rezoniranje. Primjerice Hughes (1986.) je pokazao da i četverogodišnjaci mogu uspješno rabiti matematičke simbole "+" i "-" ako shvaćaju svrhu ili razlog za uporabu matematičkih simbola.

Velik dio teškoća u učenju matematike proizlazi iz samog ustroja gradiva koji ne poštuje u dovoljnoj mjeri postojeće preduvjete za učenje, razinu djetetova intelektualnog razvoja i matematičko predznanje. Poučavati matematiku postaje znatno lakše ako upoznamo prirodu rane dječje spoznaje, što onda treba poslužiti kao polazište u građenju novih i složenijih matematičkih spoznaja. Primjerice, tradicionalni pristup učenju računanja žestoko se protivio uporabi prstiju pri zbrajanju i oduzimanju. Međutim, zapažanja razvojnih psihologa govore o tome kako se pristup rješavanju matematičkih problema mijenja s dobi, tako da se neke početne strategije računanja ("na prste") s vremenom spontano napuštaju u korist ekonomičnijih postupaka kao što je, primjerice, dozivanje nekih činjenica (npr. tablice množenja) iz dugoročnog pamćenja.

No isto se tako ustanovilo da se neke strategije i načini matematičkog rezoniranja ne ukidaju učenjem novih načela već se primjenjuju paralelno ovisno o prirodi zadatka. Štoviše, istraživanja su pokazala da se već učenici prvog razreda (Siegler i Jenkins, 1989.) razlikuju u "stilovima" rješavanja matematičkih zadataka. "Dobri" rješavači rabe onu strategiju kojom će najprije doći do rješenja i često se oslanjaju na izravno dozivanje informacija iz dugoročnog pamćenja. Do rješenja dolaze brže od "slabih" rješavača koji obično rabe nezrelije strategije. No postoji i treća skupina, tzv. "perfekcionisti", koji su u izvođenju strategije uspješni kao i "dobri" rješavači. Budući da žele imati što manje pogrešaka, ti se učenici ne žele oslanjati na izravno dosjećanje nego radije primjenjuju polagane, ali sigurne metode rješavanja. Istraživanja poput ovog upozoravaju učitelje da moraju biti osjetljivi na dječja uvjerenja i strategije koje djeca donose sa sobom, kao i na potrebu da se naprednije znanje nadograđuje na niže razine razumijevanja i iskustva s jednostavnijim strategijama.

1.2. Zašto učiti matematiku u osnovnoj školi?

Kao što je spomenuto, učenje matematike u školi odvija se često na vrlo suženom uzorku zadataka u kojem djeca najčešće ne vide svrhu takvog učenja i stečena znanja vrlo teško primjenjuju u svakodnevnom životu. To se najbolje vidi u razlici uspješnosti u rješavanju aritmetičkih zadataka izraženih brojkama i razmjerne neuspješnosti pri rješavanju istih zadataka kad su izraženi riječima u obliku životnih problema. Taj raskorak između izvođenja računa, posebno početne aritmetike, i rješavanja svakodnevnih matematičkih problema vraća nas na promišljanje toga što je zapravo svrha matematičkog obrazovanja. Najkraće rečeno, na osnovnoškolskoj razini to je postizanje matematičke pismenosti u suvremenom društvu. No, što to znači? Znači dvije stvari (Cockroft, 1982., u Nunes i Bryant, 1996.):

"Prvi cilj je osjećaj kompetencije u razumijevanju brojeva i vještina u izvođenju matematičkih radnji koje osobi omogućavaju da se uspješno nosi s praktičnim matematičkim zahtjevima svakodnevnog života (u mjerenju, pri novčanim transakcijama, pri procjeni vjerojatnosti i rizika i sl.).

Druga stvar nužna u suvremenom društvu jest uvažavanje i razumijevanje informacija koje su iznijete u matematičkim izrazima, primjerice u obliku grafikona, tabela, postocima i sl. To znači da matematički pismena osoba mora razumjeti različite načine na koje se matematika upotrebljava kao sredstvo komuniciranja."

Koliko se školsko računanje i prava matematička pismenost razlikuju govore rezultati istraživanja na uzorku od nekoliko stotina brucoša koji su trebali dati svoje mišljenje o sljedećem novinskom izvješću (Streefland, 1990., u Nunes i Bryant, 1996.):

"Budući da su nam potrebni neki konkretni podaci poigrajmo se aritmetikom na primjeru Nizozemske. To je zemlja s oko 14 milijuna stanovnika, prema 3 milijarde u SAD, što je otprilike dvjesto puta više. Nizozemska se prostire na otprilike 40.000 kvadratnih metara, prema 81.000 kvadratnih metara koliko obuhvaćaju SAD, što je oko sto puta više. Usporedimo li odnose tih veličina možemo reći da koeficijent naseljenosti u Nizozemskoj iznosi jednu petinu u odnosu na SAD."

Tu se nižu same besmislice! Prva je pogreška broj stanovnika SAD, a zatim površina zemalja u kvadratnim metrima, koja zapravo odgovara terenu površine 200 x 200, odnosno 900 x 900 metara. Pa ipak, među 300 brucoša pedagoškog fakulteta samo ih je 18 odmah uočilo netočnosti, a oko trećina uopće nije primijetila ništa čudno!

Drugi primjer o razdvojenosti školskog pristupa matematici i praktičnog matematičkog rješavanja problema su rezultati istraživanja u kojima se uspoređuju osobe bez obrazovanja, npr. brazilska djeca ulični prodavači, koji sami za sebe misle da su potpuno neuspješni u školskoj matematici. No, istodobno pri kupnji i prodaji svoje robe nevjerojatnom brzinom izračunavaju cijenu, ostatak, i uspješno se cjenkaju stalno proračunavajući svoj profit (Saxe, 1988.).

1.3. Psihološki činitelji koji utječu na učenje matematike

Opći psihološki činitelji koji utječu na učenje matematike svrstavaju se u tri šire skupine. To su: *a) senzorni i perceptivni činitelji*, *b) kognitivni činitelji*, te *c) socijalni i emocionalni činitelji*. Poznavanje tih činitelja omogućava nastavnicima da razumiju i predvide uspješnost u učenju matematike. Svaki od njih može se zamisliti kao kontinuum koji se proteže od slabe razvijenosti neke sposobnosti ili vještine, preko prosječne do vrlo visoke razvijenosti. Pod prosječnom razvijenošću podrazumijeva se razina funkcioniranja koja je svojstvena najvećem broju djece iste dobi. Što je veće odstupanje od prosjeka u oba smjera to znači da je potrebna veća prilagodba nastavnog programa i strategija poučavanja kako bi se omogućio maksimalan razvoj djetetovih potencijala.

Senzorni i perceptivni činitelji

To su činitelji povezani s funkcioniranjem osjetnih organa i početnom misaonom obradom informacija iz okoline. U njih ubrajamo: oštrinu vida i sluha, vidnu i slušnu percepciju, sposobnost uočavanja finih razlika u vidnim i zvučnim podražajima, sposobnost zahvaćanja prostornih odnosa, sposobnost prepoznavanja konstantnosti oblika (bez obzira na kut gledanja), te slušno i vidno sekvencijsko pamćenje. Razvijenost senzornog i perceptivnog funkcioniranja nužan je preduvjet za odvijanje viših misaonih procesa učenja i pamćenja. Ti činitelji su opći preduvjet za svladavanje školskog gradiva prikazanog u slikovnom ili pisanom obliku.

Kognitivni činitelji

Drugu skupinu čine kognitivni činitelji povezani s tri ključna kognitivna procesa: 1. održavanjem i zadržavanjem pažnje, 2. obradom informacija u radnom ili kratkoročnom pamćenju u svrhu pohrane u dugoročnom pamćenju, te 3. dozivanjem informacija iz dugoročnog pamćenja za ponovnu uporabu.

Kognitivni činitelji u podlozi tih procesa su brzina učenja, sposobnost pamćenja, razvijenost strategije učenja, kompetentnost u govornom izražavanju, sposobnost učenja simboličkih sustava, sposobnost usmjeravanja pažnje na bitne elemente u gradivu, sposobnost uočavanja odnosa, sposobnost odlučivanja i zaključivanja, sposobnost uopćavanja i baratanja apstraktnim pojmovima.

Općenito govoreći, noviji pristupi u poučavanju matematike kao i ostalih prirodnih znanosti polaze od konstruktivističkog stajališta, prema kojem je za razvoj matematičkog načina mišljenja ključno neposredno, konkretno iskustvo u baratanju s veličinama koje postupno dovodi do matematičkog razumijevanja, uopćavanja i baratanja apstraktnim pojmovima. Ne smatra se najvažnijim uvježbavanje izvođenja matematičkih postupaka i činjenica, nego se naglašava postupno građenje mreže ***znanja*** o matematičkim pojmovima i njihovim odnosima te fleksibilna primjena različitih ***procedura***, postupaka za rješavanje problema. Drugim riječima, u praksi se postavlja pitanje kako pomoći djeci u školi da premoste taj raskorak između predškolskog baratanja brojevima i veličinama i školskog "formalnog" pristupa matematici.

Kako bi se to postiglo potrebno je najprije upoznati odrasle poučavatelje sa zakonitostima dječjeg kognitivnog razvoja, s postojećim dječjim strategijama i mogućnostima logičkog i matematičkog zaključivanja. Postizanje razumijevanja temeljnih matematičkih pojmova i odnosa među njima pretpostavlja: a) razvijene temeljne vještine logičkog zaključivanja, b) poznavanje posebnog sustava matematičkih simbola, te c) mogućnost prijenosa spoznaja o određenim matematičkim odnosima iz jedne situacije u drugu.

Zamisao o tome da će se ustrajnim uvježbavanjem računskih operacija (uz obrazloženje da se "to tako radi"), u određenom trenutku postići i razumijevanje "zašto se to tako radi" pokazala se neutemeljenom. Štoviše, na razini anegdote možemo navesti slučaj s diplomskog ispita kada student koji je u diplomskoj radnji upotrijebio vrlo složeni statistički račun ne uspijeva napamet izračunati koliko iznosi 5 % od 20. Kada ga pitamo u čemu je teškoća on, otprilike, odgovara sljedeće: "Nemam problema s višom statistikom, ali se nisam nikad mogao brzo snaći s matematikom u osnovnoj školi."

U tablici 1. prikazana je prosječna dob kad se stječu pojedini matematički pojmovi (Good i Brophy, 1995.). Iz tablice je vidljivo da već djeca predškolske dobi imaju razvijene neke predmatematičke i matematičke pojmove. No, sposobnost razumijevanja nekih temeljnih pojmova u potpunosti se razvija tek u razdoblju od 7 do 11 godina, u tzv. razdoblju konkretnih operacija. Neki od pojmova počinju se razvijati tek u učenika koji su zašli u razdoblje tzv. formalnih operacija i apstraktnog razmišljanja. Mnoga istraživanja pokazuju da su teškoće u početnom učenju matematike često povezane s neprimjerenim "preranim" uvođenjem nekih matematičkih pojmova koji se potpuno mogu razumjeti tek u starijoj dobi, odnosno na višim stupnjevima misaonog razvoja (Reisman, 1982.)

Primjerice, premda se pojam "mjesnih vrijednosti" temelji na operaciji množenja (jedinice (1), desetice (10 x 1), stotice (100 x 1), itd.), koja se uči tek u drugom i trećem razredu, sama mjesna vrijednost uvodi se već u prvom razredu. To dovodi do mehaničkog razumijevanja uloge mjesne vrijednosti, što se kasnije ogleda u teškoćama s "prenošenjem" vrijednosti pri zbrajanju i oduzimanju višeznamenkastih brojeva. Uz to, samo obilježavanje položaja broja u višeznamenkastom broju dovodi do novih teškoća. Naime, na brojevnom pravcu brojevi rastu s lijeva nadesno, dok se mjesne vrijednosti povećavaju u suprotnom smjeru - s desna nalijevo. Kad se oba pojma istodobno uvedu u prvom razredu mogu u mnoge djece izazvati priličnu zbrku. Sljedeći izvor teškoće jest raskorak između fizičke predodžbe predmeta i simboličke oznake. Naime, svaki broj od 1 do 9 može se prikazati nekim konkretnim predmetom. Ništica se može predočiti samo kao ništa, kao praznina, no u matematičkim simbolima ona je ipak označena kao nešto, kao znak "0". Teškoće u vezi s pojmom ništice očituju se najčešće pri pisanju mjesnih vrijednosti brojeva kao što su 101, 1001, 1010 i sl.

Tablica 1. Prosječna dob i razvoj matematičkih pojmova.

Pojam	Dob		
	4-6	7-11	≥12
Pridruživanje	X		
Razvrstavanje	X		
Nizanje u slijedu	X		
Konzervacija veličina	X		
Skupovi	X		
Zbrajanje i oduzimanje	X		
Množenje i dijeljenje	x	X	
Euklidski prostor	x	X	
Višestruka klasifikacija	x	X	
Jednakost	x	X	
Komutativnost	x	X	
Asocijativnost	x	X	
Distributivnost	x	X	
Vrijeme	x	x	X
Gibanje, brzina	x	x	X
Volumen	x	x	X
Mjerenje	x	x	X
Funkcije		x	X
Omjeri		x	X
Dedukcija/indukcija			X
Formalna logika			X
Vjerojatnost			X
Dokazi			X

x - većina djece te dobi može tek djelomice shvatiti pojam
X - većina djece te dobi može dobro shvatiti pojam

Učenje dogovornog sustava matematičkih simbola može za mlađu djecu predstavljati prilične poteškoće budući da ne odgovara izgovorenim riječima. Naime, kad dijete glasno broji: "devet, deset, jedanaest, dvanaest...", devet ga podsjeti na deset, deset na jedanaest, isto kao što ga sedam podsjeti na osam, osam na devet. Dijete zatim mora naučiti da se za razliku od prethodnih brojeva riječ koja označava broj 11 bilježi s dva znaka, premda još nema predodžbu o ulozi mjesnih vrijednosti. Dijete u prvom razredu najčešće još nije usvojilo tzv. strategiju zamjene kojom deset jedinica postaje jedna desetica.

Općenito govoreći, pri poučavanju matematike valja voditi računa o kognitivnim procesima na koje se oslanjaju pojedini dijelovi matematičkog gradiva. Pri tom međuovisnost pojedinih dijelova matematičkog gradiva ne dopušta "rupe u znanju" ili zaobilaženje nekih područja. Savladavanje složenih pojmova i odnosa nemoguće je bez razumijevanja temeljnih pojmova.

Emocionalno-motivacijski činitelji

U treću skupinu psiholoških činitelja ulaze emocionalno-motivacijski činitelji koji imaju znatan utjecaj na matematičko postignuće. Emocionalan odnos prema školskoj matematici povezan je s prvim doživljajima uspjeha ili neuspjeha u tom području te s načinom tumačenja uzroka koji dovode do određenog rezultata. Na motivaciju za učenje matematike osobito poticajno djeluje uspjeh koji dijete postiže na zadacima umjerene težine, kada shvati da uz odgovarajuće zalaganje može svladati gradivo. No, ako dijete nema prilike postići uspjeh u matematičkim zadacima te ako prihvati tumačenje kako se uspjeh u matematici temelji na sposobnostima, ili na urođenom "smislu za matematiku", izgubit će samopouzdanje i pojavit će se osjećaj "naučene bespomoćnosti" - uvjerenje da što god čini dovodi do neuspjeha. Strah od neuspjeha i gubitak samopoštovanja u pozadini su straha od školske matematike koji nepovoljno utječe na postignuće. Ta vrsta tjeskobe koja ujedinjuje osjećaje napetosti, neugode i straha, može biti uzrokom, ali i posljedicom neuspjeha. Ona može na više načina nepovoljno djelovati na učinak u matematičkim zadacima, a u neke djece osobito se snažno očituje kad se suoče s problemskim verbalnim zadacima pred kojima se potpuno blokiraju (Slavin, 1997.). Anksioznost povezana s doživljajem neuspjeha sreće se češće u slabijih učenika, ali su često i vrlo sposobni i uspješni učenici podložni takvoj tjeskobi. Tjeskoba može ometati sam tijek učenja, jer se učenik više usmjeruje na "crne misli" o tome što će mu se dogoditi ako dobije lošu ocjenu ili na tjelesne znakove tjeskobe, glavobolju ili mučninu, pritisak u prsima, što dovodi do nedjelotvornijeg učenja i slabijeg pamćenja. No, u nekih učenika koji uspješno samostalno uče, strah od ispitne situacije može dovesti do toga da pokažu mnogo slabije rezultate od onog što doista znaju i mogu. Učitelji mogu na razne načine djelovati na povećanje motivacije i smanjenje anksioznosti. Motivacija se ponajprije može pobuditi ako učenici shvate svrhu učenja nekog gradiva te ako im se zadaju zadaci primjerene težine u kojima vide mogućnost postizanja uspjeha. Važno je davanje povratnih informacija o uspješnosti u kojima je naglašena uloga zalaganja. Anksioznost se može smanjiti ako se s jedne strane učenici pouče u djelotvornim stategijama samostalnog učenja, posebno kad je riječ o problemskim zadacima te u načinu praćenja vlastitog napredovanja. S druge strane, ispitna anksioznost se može znatno ublažiti ako se u razredu više potiče suradnička, a manje natjecateljska klima, ako se pazi da svi razumiju upute za rad te ako se ne radi pod velikim vremenskim pritiskom.

1.4. Kako pomoći djeci da postignu matematičko razumijevanje

Uspješno poučavanje početne matematike (ali i ostalih predmeta) pretpostavlja mogućnost primjene temeljnih spoznaja o dječjem misaonom razvoju u poučavanju. Budući da se većina djece pri ulasku u školu nalazi na razini tzv. konkretnog misaonog funkcioniranja, učenicima treba omogućiti da na konkretnom materijalu, kojim mogu slobodno baratati, provjeravaju svoje pretpostavke o odnosima među brojevima, tako da jasno mogu uočiti vlastite pogreške u zaključivanju i do kraja razumjeti točne odgovore. Tek nakon toga treba slijediti povezivanje i izražavanje tih spoznaja matematičkim simbolima. Budući da i sam način bilježenja može izazvati dodatnu smetenost, važno je ponekad naglasiti da i mi kao odrasli zamjećujemo neke od tih nelogičnosti te naglasiti da su matematički simboli dogovoreni sustav znakova koji nije savršen, ali čija uporaba ima određenih prednosti. U ranom poučavanju matematike vrlo djelotvornom pokazala se uporaba različitih konkretnih materijala (temeljnih kockica, štapića, pikula i sličnih pomagala).

U prilog toj tvrdnji govore i brojna istraživanja koja su uspoređivala uspješnost u rješavanju matematičkih zadataka sa i bez upotrebe konkretnih materijala. Tako se u jednom od njih (Hughes, 1986.) pokazalo kako mlađa djeca imaju teškoća u razumijevanju jednostavnih zadataka zbrajanja i oduzimanja, ako su im brojevi pokazani izvan konkretne situacije koja bi ih učinila smislenima. Djeci predškolske dobi postavljani su matematički zadaci u različitim eksperimentalnim uvjetima. Jednom je pred njima bila kutija u kojoj je bila jedna kocka. Zatim bi ispitivač dodavao kocke u kutiju i svaki put bi pitao koliko je kocaka u kutiji. U drugoj situaciji od djece se tražilo da zamisle takvu kutiju i u mislima stavljaju u nju kocke. U trećoj situaciji djeca su zamišljala trgovinu u koju ulazi određen broj djece. U četvrtoj situaciji djeca su jednostavno pitana koliko je 1 i 2, i sl. Pokazalo se da djeca najbolje uspijevaju odgovoriti na pitanje kad je prisutna konkretna kutija, razmjerno točno su odgovarala kad su morala zamišljati kutiju ili trgovinu, a najslabije su odgovore davala kad su morala računati u situaciji koja im je bila besmislena ($1 + 2 = ?$).

Ti rezultati govore u prilog tzv. spiralnog modela poučavanja koji je prvi predložio Bruner (1971., u Wood, 1995.). Koraci u tom modelu su sljedeći:

- prikazivanje zadatka konkretnim predmetima,
- uporaba govora kako bi se opisao način rješavanja,
- prikazivanje rješenja slikom (grafički),
- simboličko prikazivanje zadatka (kojim se konkretno iskustvo uopćava).

Drugim riječima, kad god je moguće gradivo treba obraditi tako da se djeci omogući konkretno iskustvo (promatranjem ili pokusom), zatim se opisuje i pokušava objasniti ono što se opazilo, potom se to prikazuje slikom ili shemom, a zatim odgovarajućim simbolima. Konkretni materijali važni su za stvaranje matematičkih pojmova posebno u predškolskoj dobi, jer se unutarnje misaone sheme oblikuju kroz baratanje predmetima, tj. motoričkim putem.

Usporedba različitih konkretnih nastavnih sredstava pokazala je da su za učenje matematike u nižim razredima osnovne škole osobito pogodne tzv.

temeljne kockice - drvene ili plastične kockice u boji dimenzije oko 2 x 2 x 2 cm (Balka, 1995.a, 1995.b; Cook i sur., 1997.). Pri tom su plastične kocke prikladnije, jer se mogu spajati poput lego kocaka u štapiće ili trodimenzionalne oblike. Takva je vrsta materijala pogodna iz sljedećih razloga:

1. Pomoću njih može se prikazati širok raspon pojmova i operacija. Temeljne kocke su pogodne jer se pomoću njih mogu prikazati sve osnovne aritmetičke operacije s prirodnim brojevima, pojam mjerenja, mogu se upotrijebiti pri prikazivanju problemskih zadataka. Osim toga prikladne su i za složenije operacije poput kvadriranja i kubiranja, upoznavanja s razlomcima, te za upoznavanje s funkcijskim odnosima i računom vjerojatnosti.
2. Mogu se rabiti u predškolskoj dobi, ali i kasnije gotovo do kraja osnovne škole, tako da su djeci dobro poznat materijal i s njima sigurno barataju.
3. Važno je i to što temeljne kockice ipak nisu konkretni predmeti te omogućavaju prijenos općih pravila u specifične situacije. Naime, jednom mogu predstavljati kolače, jednom novce, jednom cigle, a pri tom djeca uočavaju da s njima izvode određene procedure koje daju iste rezultate.

Uz teorijske dijelove priručnika prikazat ćemo kako se u predškolskoj dobi pomoću kockica može potaknuti razumijevanje predmatematičkih i temeljnih matematičkih pojmova, a zatim kako se u školi kockice mogu koristiti pri učenju temeljnih aritmetičkih operacija i rješavanju problemskih zadataka.

2.

Kad prsti više nisu dovoljni - kognitivni aspekti zbrajanja i oduzimanja

2.1. Temeljna matematičko-logička načela

Pojmovi zbrajanja i oduzimanja najčešće su djeci bliski i prije polaska u školu. Temeljni preduvjet za učenje zbrajanja i oduzimanja jest vještina brojenja, koju većina djece svlada već u dobi između 4 i 5 godina. Iako djeca u dobi od 2 ili 3 godine mogu ponavljati nazive brojeva poput pjesmice, ona ih još ne mogu povezati sa samim pojmom brojenja. Kako bi razumjela što znači brojiti djeca moraju prethodno svladati sljedeća temeljna logička načela:

1. Načelo *pridruživanja* "jedan prema jedan" podrazumijeva da dijete mora znati da pri prebrojavanju predmeta u nekom skupu svakom predmetu može pridružiti samo jedan broj. Dijete također treba shvatiti da je, premda se redoslijed brojeva pri brojenju mora poštovati, svejedno od kojeg elementa u skupu brojenje počinje.
2. Načelo *kardinalnosti* odnosi se na spoznaju da je posljednji broj koji se izgovori pri brojenju skupa predmeta kardinalni broj koji ujedno označava ukupan broj predmeta u skupu. To je broj na temelju kojeg se neki skup predmeta uspoređuje s drugim skupovima. Za dijete možemo reći da je svladalo načelo kardinalnosti ako točno može odgovoriti na pitanje koliko nečega ima u nekom skupu.
3. Načelo *ordinalnosti* odnosi se na spoznaju o tome da su brojevi poredani prema uzlaznom nizu veličine (tj. 3 je uvijek veće od 2, 2 veće od 1, itd.). Dijete je usvojilo ovo načelo ako nam u nizu predmeta može točno pokazati koji je predmet po redu prvi, drugi, treći itd. Drugi način provjere shvaćanja tog pravila jest da kad imamo dva niza nekih predmeta, pokažemo u jednom nizu neki predmet (primjerice treći po redu) i zatim tražimo od djeteta da u drugom nizu odabere predmet koji odgovara prvom.
4. Načelo *izmjerljivosti* odnosi se na shvaćanje da se pojedini predmeti mogu međusobno uspoređivati ako se pri usporedbi rabe iste dogovorene mjerne jedinice. Primjerice, dijete shvaća pravilo izmjerljivosti ako, rabeći vlastiti dlan, može usporediti širinu stola i stolice i reći koliko dlanova su one duge.

5. Načelo *konzervacije* odnosi se na činjenicu da, bez obzira kako su predmeti u skupu raspoređeni, njihov broj ostaje nepromijenjen, odnosno sačuvan. Tako će na stolu biti uvijek pet bombona bez obzira jesu li međusobno razmaknuti 5 ili 10 centimetara. Zamisao o očuvanju nekog svojstva predmeta unatoč promjeni neke druge osobine odnosi se i na druga svojstva, poput količine, težine, obujma. Primjerice, za dijete možemo reći da je shvatilo načelo konzervacije količine ako pri prelijevanju 1 dcl vode iz šire u užu čašu izjavi da je, unatoč višoj razini vode u užoj čaši, količina vode ostala nepromijenjena.
6. Načelo *tranzitivnosti* uzima u obzir odnose između više predmeta. Prema tom pravilu slijedi ako je neka izmjerljiva količina A veća od B, a B je veća od C onda slijedi da količina A mora biti veća i od C. Dijete pokazuje da je svladalo to načelo ako može odrediti da je primjerice Marko koji je stariji od Ivana istodobno stariji i od Ivanova mlađeg brata Jurice.
7. Pravilo *reverzibilnosti* (povratnosti) odnosi se na spoznaju o tome koje će promjene promijeniti količinu, a koje neće. No nije dovoljno znati da se dodavanjem količina povećava, a oduzimanjem smanjuje. Potrebno je shvatiti da te promjene mogu imati povratni učinak. Neke od promjena mogu poništiti prethodne, npr. $5 + 2 - 2 = 5$. Drugim riječima, djeca će teško svladati osnovno računanje ako ne uoče reverzibilan odnos između zbrajanja i oduzimanja. Dijete koje to ne shvati neće razumjeti niti da se skup od 7 naranči sastoji od 5 i 2 naranče (ili od 4 i 3 naranče ili od 6 i 1 naranče), tj. neće razumjeti aditivnu kompoziciju broja.

Navedena načela možemo nazvati općim matematičko-logičkim načelima. Na njih se nadovezuje skup posebnih pravila koji ovisi o određenoj kulturi i polazi od nekih unaprijed dogovorenih temeljnih konvencija (npr. dužina centimetra, dekadska baza i sl.). Poznavanje tih konvencija nužno je za svladavanje viših matematičkih tehnika. U školi se taj sustav poučava kao da je apsolutna datost, a ne predmet dogovora.

Novija istraživanja pokazuju da učenje tih kulturno određenih dogovora može povećati razumijevanje općih logičkih načela. Drugim riječima, umjesto da se djeci npr. dekadski sustav prikazuje kao jedini postojeći valjalo bi ih upozoriti i na mogućnost uporabe sustava s drugim bazama. Važna je usporedba između usmenog i pismenog bilježenja brojeva. Kao što je spomenuto pri nabrajanju i pisanju znamenaka niz počinjemo pisati s lijeva nadesno (tako pišemo i slažemo i riječi), no kad pišemo višeznamenkaste brojeve vrijednost pojedinih znamenki (mjesna vrijednost) raste s desna nalijevo. Dječja zbunjenost time može se izbjeći ako na proturječnost upozorimo sami.

Isto tako, pri poučavanju matematičkih simbola valja izbjegavati istodobno preopterećenje računom i svladavanjem novih znakova. Primjerice, znakove "<" i ">" valja učiti najprije u skupu brojeva u kojem se djeca dobro snalaze (npr. do 20), a tek kasnije u skupu većih brojeva.

I konačno, treća stvar potrebna za razumijevanje matematičkih operacija je situacija u kojoj se određeni matematički postupak primjenjuje. Učitelji se često žale da učenici ne znaju koji matematički postupak ili tehniku trebaju primijeniti u novoj situaciji. Naime, djeca uspiju svladati određenu tehniku, primjerice mogu naučiti algoritam za vađenje drugog korijena, množenje razlike kvadrata ili rješavanje jednadžbi, ali ne znaju koji je postupak dobar izbor za rješenje određenog problema.

Stoga moramo razumjeti matematičku situaciju da bismo je mogli uspješno predočiti i riješiti. Drugim riječima, važno je prepoznati opća načela u specifičnoj situaciji kako bi se prepoznalo je li neka opća procedura (npr. zbrajanje) primjerena za rješavanje određenog problema. Štoviše, neki zadaci se mogu rješavati i na više načina koji dovode do točnog rezultata. Primjerice, problem: "Ana ima sedam bombona. Pojela je dva, koliko joj je ostalo?" petogodišnje dijete neće znati riješiti postavljajući računsku operaciju 7 - 2 = 5. No ipak će moći doći do rješenja oslanjajući se na unazadno brojenje vlastitih prstiju. Može podići 7 prstiju te sakriti dva i prebrojiti ostatak. Dijete je shvatilo osnovno pravilo da će se sve ono što se događa s odbrojavanjem prstiju dogoditi i s bombonima. I u složenijim zadacima pronalaženje točnog rezultata zapravo znači da smo u toj konkretnoj situaciji prepoznali mogućnost primjene nekog općeg načela.

2.2. Razvoj strategija zbrajanja i oduzimanja

Pod pojmom strategije podrazumijevamo namjerni postupak pomoću kojeg želimo ostvariti neki cilj, odnosno riješiti problem (Siegler i Jenkins, 1989.). Za razliku od nestrateškog ponašanja, kao što je nasumično pogađanje rješenja, ili pak automatsko pozivanje neke činjenice iz dugoročnog pamćenja, strateško ponašanje uključuje prepoznavanje cilja te izbor sredstava kojima se taj cilj može ostvariti.

Razvoj strategija zbrajanja i oduzimanja kreće se u dva pravca. S jedne se strane povećava faktičko i pojmovno znanje. Mi znamo da je $5+7=12$ i s vremenom postajemo sve sigurniji i točniji pri dosjećanju ili pak postajemo sve sigurniji u načelo komutativnosti zbrajanja. Pokazalo se da se činjenično znanje utvrđuje ovisno o mehanizmima koji učvršćuju asocijativnu vezu među činjenicama. Tako će dijete, budući da se češće sreće sa zadacima tipa $n+1$, jer počivaju na brojenju, bolje zapamtiti rezultate takvih zadataka. Isto se tako lakše pamti pribrajanje istih pribrojnika.

Povećanje činjeničnog znanja smanjuje potrebu za uporabom strategija. Jednom kad dijete zapamti da je $3+3=6$, nema više potrebu koristiti strategiju prebrojavanja prstiju. S druge strane u zadacima koje ne može riješiti dozivanjem rezultata iz dugoročnog pamćenja uočavaju se promjene u postupcima kojima se do rezultata dolazi u smislu sve veće ekonomičnosti. Pri tom se pokazalo da ni djeca ni odrasli sustavno ne rabe samo jednu strategiju.

Primjerice, ako računamo pod vremenskim pritiskom više ćemo se oslanjati na dosjećanje gotovih činjenica riskirajući pogrešku uslijed mogućeg zaboravljanja točnog odgovora. Ako nam je pak važno da dođemo do što točnijeg rezultata, ponašat ćemo se drukčije - uporabit ćemo strategiju računanja za koju smo posve sigurni da će nas dovesti do točnog rezultata (za djecu je to često strategija prebrojavanja), iako je vremenski neekonomična.

2.3. Strategije zbrajanja

Budući da je činjenično znanje predškolske djece ograničeno, ona se pri brojenju i jednostavnom računanju moraju koristiti jednostavnim strategijama koje počivaju na brojenju unaprijed. Strategije zbrajanja u djece predškolske i rane školske dobi su sljedeće:

1. Prebrojavanje svih članova u skupu. Da bi riješilo zadatak 3 + 5 dijete podiže tri prsta, zatim pet i broji izgovarajući: "1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8".
2. Nastavljanje brojenja od prvog pribrojnika. Dijete rješava isti zadatak (3 + 5) tako da odmah digne tri prsta i nastavi podizati još pet prstiju po jedan uz odbrojavanje: "4, 5, 6, 7, 8".
3. Strategija "pribrajanje manjeg". Ova strategija predstavlja znatan napredak u smislu sve veće ekonomičnosti računanja. Zadatak 3 + 5 dijete koje rabi ovu strategiju riješit će tako da digne 5 prstiju, tj. počinje od većeg pribrojnika i nastavlja dodavati još tri prsta odbrojavajući: "6, 7, 8". Primjena ove strategije pokazuje da je dijete shvatilo načela kardinalnosti i reverzibilnosti.
4. Kombinacija dosjećanja i strategije. Kad se prijeđe na računanje s većim brojevima, istodobno se koriste i činjenično znanje i strategije. Primjerice, djeca i odrasli ponekad zbrajaju 7 + 9 tako da jedan pribrojnik rastave na 7 + 2, automatski iz sjećanja povuku rezultat 7 + 7 = 14 i zatim, rabeći strategiju pribrojavanja manjeg, dodaju 2.
5. Strategija dosjećanja u kojoj se dozove informacija iz dugoročnog pamćenja. Primjerice, dijete odmah odgovori da je 7 + 9 = 16.

2.4. Strategije oduzimanja

Kod oduzimanja početne strategije oduzimanja oslanjaju se na mogućnost i razumijevanje brojenja unazad. Kod brojenja unazad moguće su sljedeće strategije:

1. Strategija umanjivanja. Ova se strategija sastoji u odbrojavanju umanjitelja od početne veličine. Tako će dijete izračunati koliko je 7 - 5 tako da digne sedam prstiju i od njih odbroji 5.
2. Strategija uvećavanja. Ovom strategijom se zadatak 7 - 5 rješava tako da se krene od manjeg broja i broje prsti dok se ne stigne do većeg broja. Dijete digne pet prstiju i zatim još odbrojava: "6, 7", te konstatira: "Do 7 mi trebaju još 2 prsta".
3. Izborna strategija. Izborna strategija zapravo znači da dijete, ovisno o prirodi zadatka, izabire jednu od dvije gore opisane strategije, ovisno o

tome koji postupak zahtijeva manji broj odbrojavanja. Tako će za zadatak 7 - 2 upotrijebiti strategiju umanjivanja, a za zadatak 7 - 5 strategiju uvećavanja.

4. Strategija dosjećanja prilikom koje se odmah dozove informacija pohranjena u dugoročnom pamćenju.

Većina autora se slaže da početno vježbanje s različitim oblicima odbrojavanja unazad i unaprijed bitno pridonosi razumijevanju zbrajanja i oduzimanja kao suprotnih operacija (Nunes i Bryant, 1996.).

Istraživanja su pokazala da se većina djece do 9 godina najčešće pri zbrajanju služi strategijama pribrojavanja manjeg broja, a pri oduzimanju izbornom strategijom. Pritom se pokazalo da te strategije ovise o poznavanju ključnih načela povezanih s načelom reverzibilnosti. Strategija pribrojavanja manjeg ovisi o shvaćanju aditivne kompozicije broja i načela komutativnosti, dok izborna strategija ovisi o prepoznavanju komplementarnosti zbrajanja i oduzimanja. Oba načela mogu se podvesti pod opću logičku shemu odnosa dijelova i cjeline.

Većini djece su ove strategije pri ulasku u školu dostupne, što znači da ih rabe spontano ili ih mogu bez većih poteškoća primijeniti kad ih se na to upozori (Aschkraft, 1990.). Znatnu pomoć u predočavanju takvih zadataka pruža uporaba prstiju pri računanju. No, prve teškoće u računanju javljaju se već kad se počinje raditi s pribrojnicima većim od 5. Naime, kad dijete treba pribrojiti 7 i 2, ne može se uvijek lako odlučiti kako će pomoću prstiju prikazati broj 7 koji nadmašuje prste jedne ruke, te kako će mu zatim pribrojiti 2. Upravo kad naiđe na takve teškoće valja imati u pripremi konkretan materijal, poput temeljnih kockica, koji će omogućiti da se jednostavno i lako prikažu matematički zadaci koji uključuju računanje s brojevima većim od 10.

2.5. Aktivnosti

1. Koliko stane u ruku?

GRADIVO: Usporedba količina i početno mjerenje

UZRAST: Predškolska dob (predznanje o brojenju)

SVRHA: Razvoj matematičkog jezika i razumijevanje mjerenja

BROJ DJECE: Vrtićka grupa (do 10 djece)

PRIBOR: Parovi dlanova izrezani iz raznobojnog papira (različite boje za svako dijete) i jedan par za odgajateljicu (slika je u prilogu vježbe). Dvije kutije s kockicama različite boje. Kockice su raspoređene tako da u jednoj kutiji ima 40 pojedinačnih kockica, a u drugoj su kutiji spojene u parove (20 parova).

UPUTE: Svako dijete dobije svoj par dlanova od papira. Djeci se kaže da zamisle kako su kockice različite vrste bombona. Iz prve kutije odgajateljica zagrabi jednom rukom što više može kockica i stavi ih na svoj papirnati dlan. Djeca prebrojavaju koliko je kockica (bombona) učiteljica izvadila. Zatim moraju pogoditi koliko kockica će izvaditi drugom rukom iz iste kutije. Svoje predviđanje trebaju obrazložiti. Zatim odgajateljica zagrabi kockice iz druge kutije i stavi ih na drugi papirnati dlan. Djecu pita: "Kojom rukom sam izvadila više bombona?" Djeca prebrojavaju "bombone" na jednom i drugom dlanu.

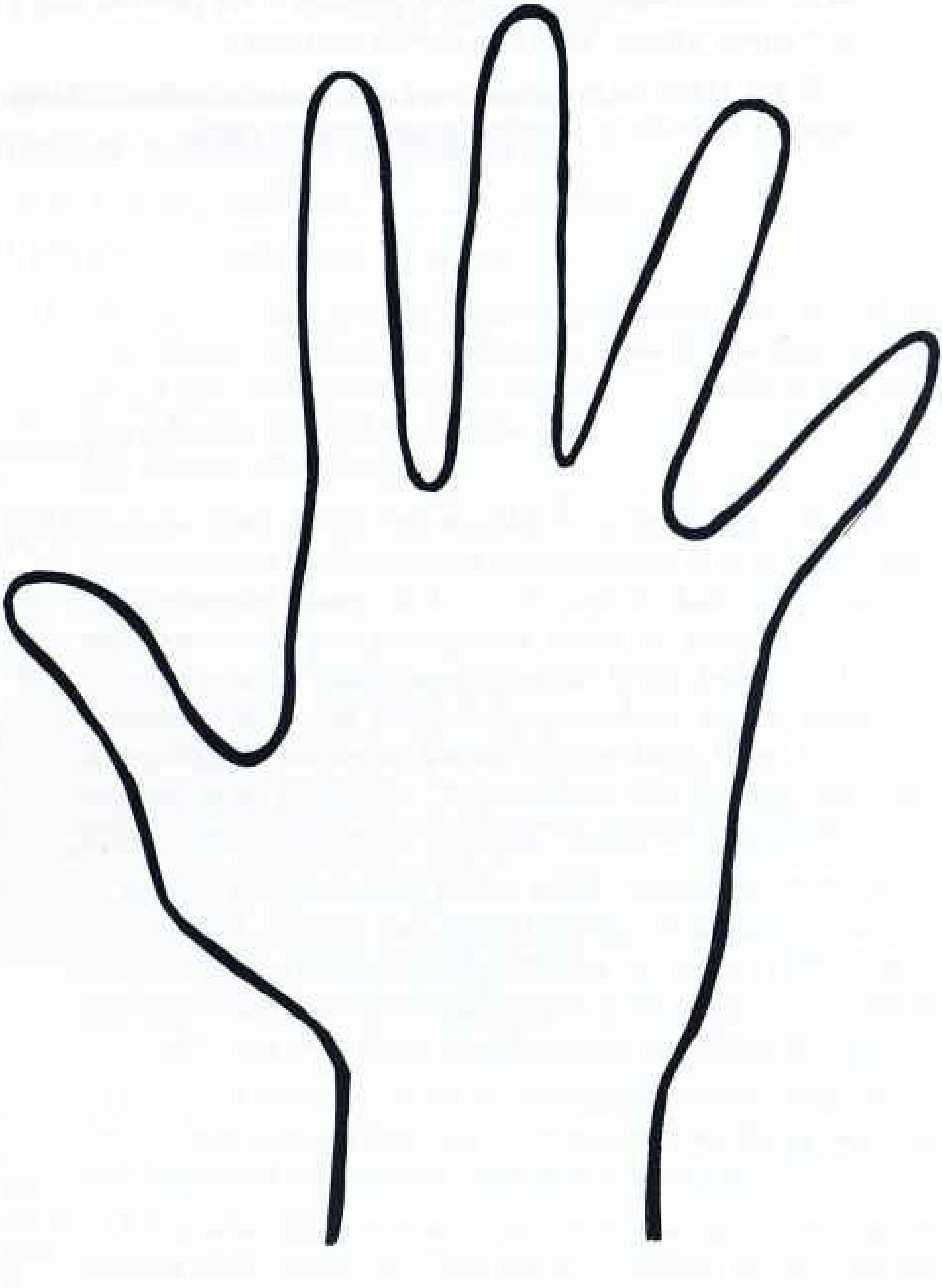
Kockice se vrate u odgovarajuću kutiju i zatim svako dijete ponavlja postupak. Najprije vadi manje bombone (pojedinačne kockice), stavlja ih na svoj papirnati dlan, prebrojava ih i vraća u kutiju. Zatim predviđa koliko će izvaditi drugom rukom iz iste kutije i to čini. Mora obrazložiti svoje predviđanje. Kockice ostaju na papirnatom dlanu.

Kad su sva djeca obavila prvi dio aktivnosti prilazi se vađenju bombona iz druge kutije. Dijete vadi iz druge kutije, stavlja na papirnati dlan, prebrojava ih i uspoređuje na kojem je dlanu više.

Dječja obrazloženja o tome koliko će bombona zagrabiti pokazat će razumijevanje odnosa "što manja jedinica (predmet) to više stane na dlan (količina)" (odnosno što veći dlan to više bombona stane u njega).

VARIJACIJE ZADATKA: Djeca mogu uspoređivati koliko su bombona izvadila lijevom ili desnom rukom, odnosno u drugom pokušaju koliko većih i manjih bombona, tako da ih poredaju u dva paralelna niza i uoče pojam "razlike" kao važan element oduzimanja.

U istu kutiju se mogu pomiješati veći i manji bomboni i zatim uspoređivati koliko se izvadilo lijevom i desnom rukom.



2. Brojimo bubamare

GRADIVO: Usporedba količina (pojmovi "više", "manje", "jednako")

UZRAST: Predškolska dob (predznanje o brojenju)

SVRHA: Razvoj matematičkog jezika i razumijevanje odnosa među brojevima

BROJ DJECE: Vrtićka grupa (do 10 djece)

PRIBOR: Iz tkanine ili krep-papira (veličine A-4) izrezani raznobojni listovi (po jedan za svako dijete i odgajateljicu, slika je u prilogu vježbe). Svako dijete dobije uz svoj list i šest pojedinačnih kockica iste boje. To su njegove bubamare.

UPUTE: Svako dijete (i odgajateljica) stavi svoje bubamare na svoj list. Djeca provjeravaju koliko se bubamara nalazi na listu. Svi se trebaju uvjeriti da imaju isti broj bubamara.

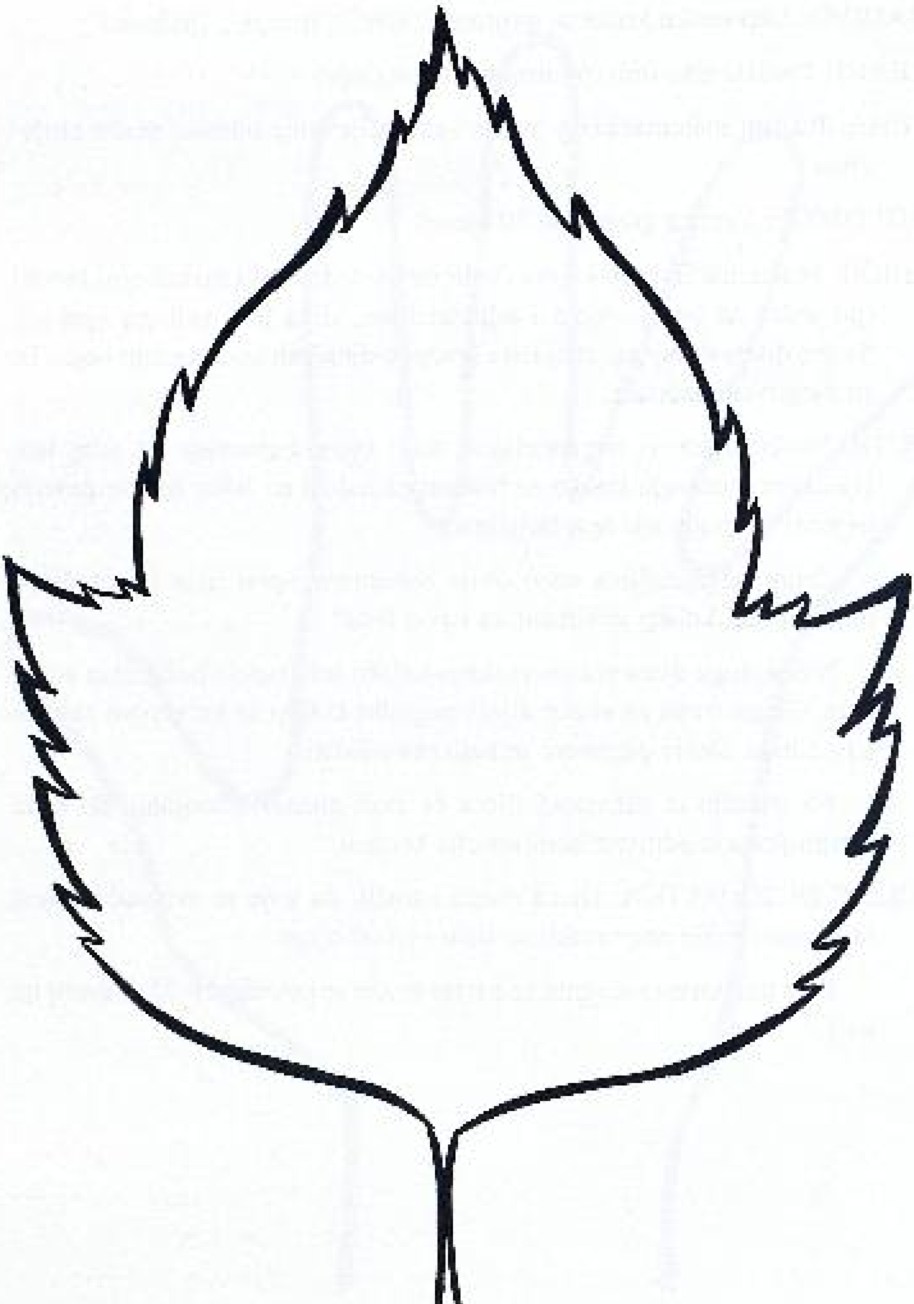
Zatim odgajateljica stavi dvije bubamare ispod lista i pita djecu mogu li reći koliko je bubamara ispod lista?

Nakon toga djeca potajno sakriju koliko žele svojih bubamara ispod lista. Grupa treba za svako dijete pogoditi koliko se bubamara sakrilo ispod lista. Svoje odgovore trebaju obrazložiti.

Na temelju te aktivnosti djeca će steći znanje o brojanju do 6, te razumijevanje aditivne kompozicije broja 6.

VARIJACIJE ZADATKA: Djeca mogu istražiti na koje se sve načine šest bubamara može rasporediti na listu i ispod njega.

Broj bubamara s kojima se barata može se povećavati (dok stanu na list).



3. Tražimo piliće

GRADIVO: Usporedba količina, početno zbrajanje

UZRAST: Predškolska dob (predznanje o brojenju, načelo kardinalnosti i konzervacije broja)

SVRHA: Razvoj matematičkog jezika, razumijevanje odnosa zbrajanja i oduzimanja

BROJ DJECE: Vrtićka grupa (do 10 djece)

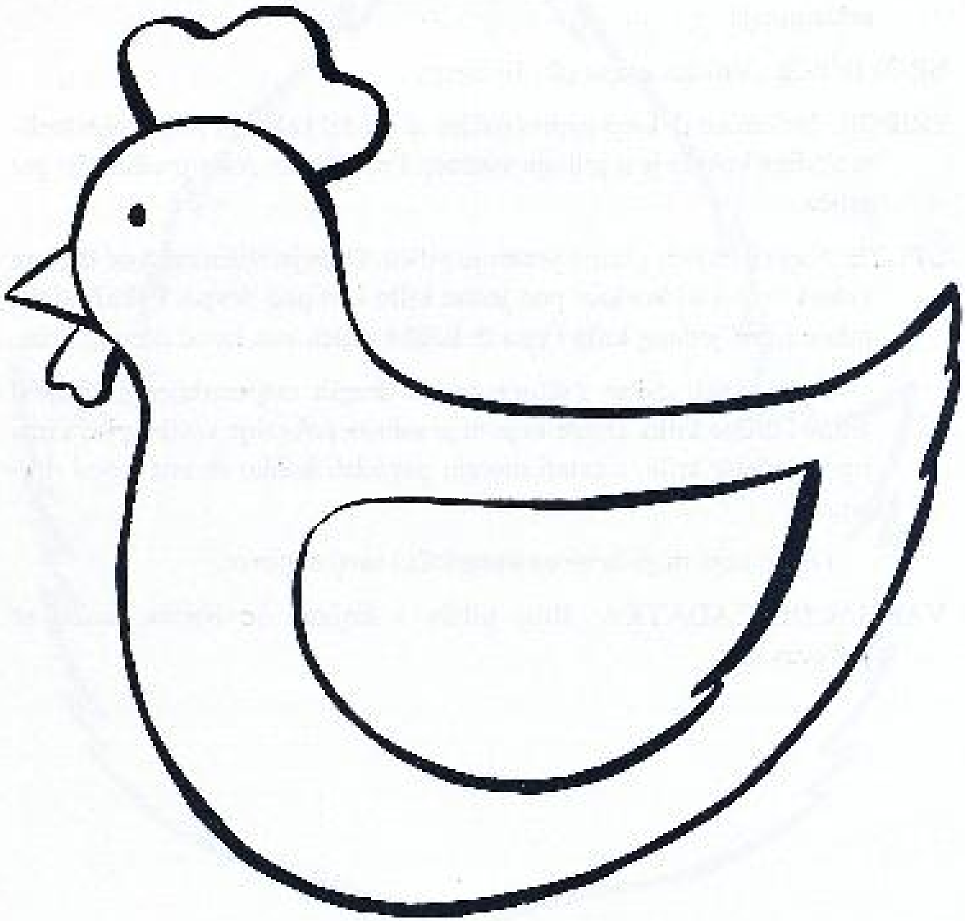
PRIBOR: Iz tkanine ili krep-papira načini se model kokoši s pokretnim krilima (slika kokoši je u prilogu vježbe). Pet žutih kockica predstavlja pet pilića.

UPUTE: Najprije djeca glasno prebroje piliće. Odgajateljica zakloni tijelom kokoš i stavi tri kockice pod jedno krilo i tri pod drugo. Pokaže djeci piliće ispod jednog krila i pita ih koliko pilića ima ispod drugog krila.

Sada svako dijete zaklonjeno od drugih raspoređuje piliće pod jedno i drugo krilo. Dijete koje ih je sakrilo pokazuje koliko pilića ima ispod jednog krila, a ostali moraju pogađati koliko ih ima ispod drugog.

Dijete koja pogađa mora obrazložiti svoj odgovor.

VARIJACIJE ZADATKA: Broj pilića s kojima se barata može se povećavati.



4. Slažemo jaja

GRADIVO: Razvrstavanje i kombiniranje, grafičko predočavanje

UZRAST: Predškolska dob (predznanje brojenja)

SVRHA: Razvoj matematičkog jezika, uočavanje obrazaca i načela kombiniranja, sustavan pristup razvrstavanju

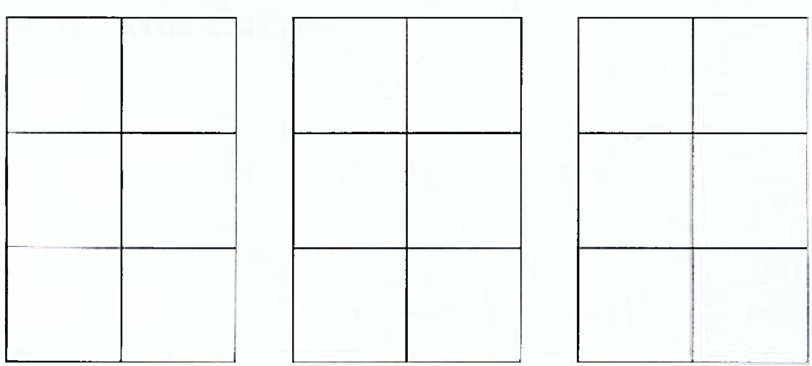
BROJ DJECE: Vrtićka grupa (do 10 djece)

PRIBOR: Svako dijete dobije kutiju za jaja sa 6 udubina i 2 kockice koje predstavljaju jaja, olovku i list papira s nekoliko shematski nacrtanih kutija za jaja (slika u prilogu vježbe).

UPUTE: Najprije se od djece zatraži da jedno jaje stave u kutiju. Postavlja im se pitanje: "Na koliko različitih načina možeš jedno jaje staviti u kutiju?". Raspravite kako su pronašli na koliko različitih načina mogu spremiti jedno jaje u kutiju.

Zatim uzmite dvije kockice i pitajte na koliko se različitih načina mogu dva jaja staviti u kutiju. Na papiru neka nacrtaju svoje pokušaje. Hoće li biti više ili manje načina ako se uporabe dva jaja?

VARIJACIJE ZADATKA: Kombiniranje s tri jaja; kombiniranje s dva raznobojna jaja.



5. Izabiremo bombone

GRADIVO: Usporedba količina, početno zbrajanje

UZRAST: Predškolska dob (predznanje o razvrstavanju, prepoznavanje zajedničkih svojstava)

SVRHA: Razvoj matematičkog jezika, uočavanje obrazaca i načela klasifikacije

BROJ DJECE: Vrtićka grupa (do 10 djece)

PRIBOR: Jedan veliki papirnati tanjur i za svako dijete mali papirnati tanjuri. 10 puta po 4 istobojne kockice koje predstavljaju bombone.

UPUTE: Najprije odgajateljica odabere iz velikog tanjura 4 crvene kockice i stavi ih na svoj tanjur. Zatim djeca trebaju opisati taj skup.

Djeca naizmjence uzimaju po 4 kockice i opisuju kako su odabrala baš takav skup.

VARIJACIJE ZADATKA: Bomboni se mogu sastaviti i od dvije kockice istih ili različitih boja, tako da se kockice mogu odabirati prema različitim načelima (manje i veće, jednobojne, raznobojne itd.)

6. Točan položaj

GRADIVO: Predmatematički prostorni pojmovi

UZRAST: Predškolska dob (predznanje o prostornim odnosima i brojenju)

SVRHA: Razvoj prostorne percepcije i pojma kardinalnosti

BROJ DJECE: Vrtićka grupa (do 10 djece)

PRIBOR: Svako dijete dobije list papira koji je uzdužnom crtom podijeljen na dva dijela. Uz to dobije 4 puta po 3 istobojne kockice (npr. 3 plave, 3 žute, 3 zelene i 3 smeđe)

UPUTE: Valja se dogovoriti kako će se crta postaviti: okomito ili vodoravno. Ako je crta postavljena vodoravno, odgajatelj govori upute koje djeca slijede:

Stavi plavu kockicu ispod crte.
Stavi 2 žute kockice iznad crte.
Stavi tri smeđe kockice iznad crte.
Stavi jednu zelenu ispod crte i dvije plave iznad crte.
Stavi jednu žutu i dvije zelene ispod crte.

Kad su obavila zadatak odgajateljica traži od djece da prebroje koliko ukupno kockica ima, odnosno koliko ih ima iznad, a koliko ispod crte. Kockice mogu poredati u dva niza i odrediti kojih ima više.

VARIJACIJE ZADATKA: Vježbanje pojmova lijevo - desno, ako se papir postavi okomito.

Može se dodati još jedna crta tako da se prva prekriži i dobiju četiri jednaka polja u koja se zatim smještaju kockice prema uputama “gore lijevo”, “dolje desno” itd.

7. Vesela tombola

GRADIVO: Prepoznavanje boja i broja

UZRAST: Predškolska dob (predznanje brojenja)

SVRHA: Razvoj vidne diskriminacije za boje i prostor

BROJ DJECE: Vrtićka grupa (do 10 djece)

PRIBOR: Svako dijete dobije karticu sa 16 polja za tombolu. Na svakoj kartici se polja oboje s 8 različitih boja, tako da na svakoj kartici budu po 2 polja iste boje. Raspored obojenih polja je na svakoj kartici različit. Svako dijete dobije i kutijicu s kockicama odgovarajućih boja za prekrivanje polja.

Papirnata vrećica s raznobojnim kockicama.

UPUTE: Jedno dijete vadi, ne gledajući, kockice iz vrećice i izgovara boju. Djeca kockicama te boje pokrivaju jednako obojana polja na svojim karticama. Ako se neka boja ponovi, čeka se dok se ne prozove boja koja još nije uporabljena.

Pobjednik je dijete koje je prvo pokrilo četiri polja u nizu (okomito, vodoravno ili dijagonalno) ili sva četiri kuta.

VARIJACIJE ZADATKA: Na kartici se mogu uporabiti različiti obrasci, tako da neka boja bude zastupljena s više obojenih kvadratića, a da neke boje uopće nema.

8. Zbrajamo do 20

GRADIVO: Zbrajanje

RAZRED : Prvi

SVRHA: Uvježbavanje računanja napamet

BROJ DJECE: Skupine od po 4 djece

PRIBOR: Za svako dijete podloga s 12 polja (3 x 4) u koja su upisani brojevi od 1 do 12. Svako dijete dobije 12 kockica jedne boje.

Skupina zajednički dobije dvije kocke za igranje igre "Čovječe ne ljuti se".

UPUTE: Djeca redom bacaju kocke. Svako dijete odjednom baca dvije kocke i izračuna zbroj. Na svojoj podlozi pokriva polje s tim brojem. Zatim na red dolazi sljedeći igrač. Ako se dogodi da dijete pogriješi, na redu je drugo dijete.

Ako se neki zbroj ponovi, dijete čeka dok na njega ponovno dođe red za bacanje. Pobjednik je dijete koje je prvo ispunilo svoju karticu.

VARIJACIJA ZADATKA: Neka polja na kartici mogu se obojiti, pa je pobjednik dijete koje prvo pokrije obojenu površinu.

9. Izgradimo zbrajanje

GRADIVO: Zbrajanje brojeva do 10

RAZRED: Prvi

SVRHA: Razumijevanje zbrajanja - vizualizacija zbrajanja kroz rad s kockicama

BROJ UČENIKA: Svaki učenik radi pojedinačno - može istovremeno cijeli razred ili samo jedna skupina

PRIBOR: 30 temeljnih kockica jedne boje i 30 kockica druge boje, podloga s 10 x 10 mjesta za kockice, tri numeričke rečenice (npr. 4 + 5 =), dva puta po tri prazna papirića za rezultat (to je pribor za svakog pojedinog učenika). (Slika prikazuje podlogu s točno poslaganim kockicama i numeričke izraze na koje još valja upisati odgovor).

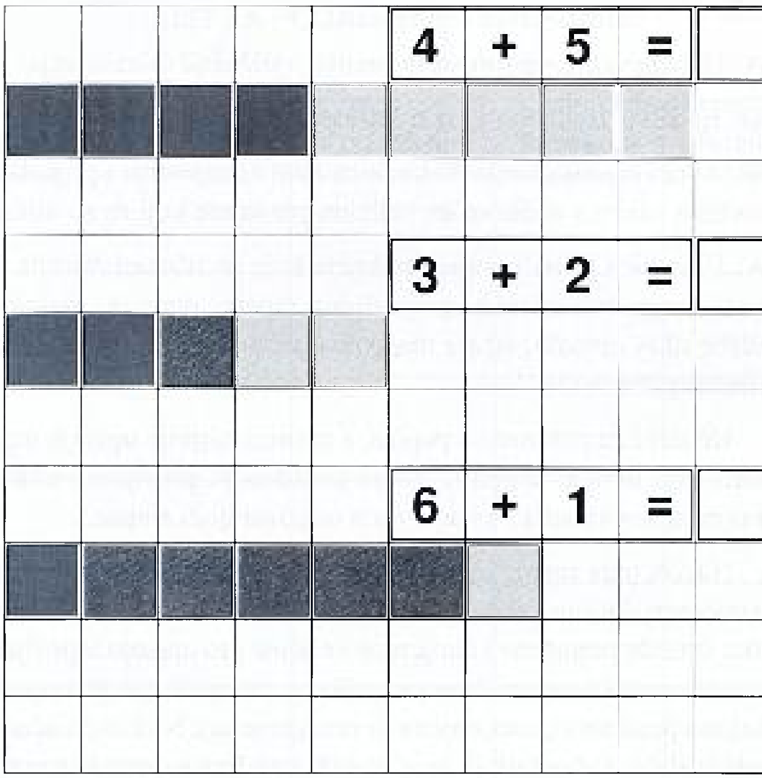
UPUTA: Svaki učenik dobije svoju podlogu na koju mu treba složiti njegove tri numeričke rečenice. Valja pripaziti da ima dovoljno mjesta za slaganje kockica, tj. da jedan red između složenih kockica ostaje prazan.

Uputa za djecu glasi: "Sad ćemo zbrajati Petrove i Anine bombone. Petrovi bomboni su jedne, a Anini druge boje. Svatko od vas treba na svojoj podlozi pomoću kockica složiti Petrove i Anine bombone. Prvi broj u zadatku predstavlja Petrove, a drugi Anine bombone. To možete napraviti ovako - npr. ako je zadatak 2 + 3 to znači dvije kockice jedne boje, za Petrove bombone, i do njih tri kockice druge boje, za Anine bombone (nacrtati na ploči). Kad složite neki zadatak prebrojite kockice i upišite rješenje zadatka na papirić. Taj papirić stavite na podlogu iza znaka =. Tako napravite za svaki zadatak, a kad ste gotovi pozovite me da pogledam kako ste to riješili."

Kad su djeca gotova pokupite njihove numeričke izraze i dajte im tri nova zadatka (od nekog drugog učenika). Neka ovaj put sve slože sami.

VARIJACIJE ZADATKA: Možete prirediti zadatke s manjim ili većim pribrojnicima, ovisno o gradivu koje su djeca svladala.

Konstruirajte numeričke izraze koji pokazuju svojstvo zamjene mjesta pribrojnika (5 + 3 = 8 i 3 + 5 = 8) (komutativnost), pa neka djeca prikažu te izraze pomoću kockica.


4 + 5 =
3 + 2 =
6 + 1 =

10. Pogađamo i mjerimo

GRADIVO: Mjerenje dužina i oduzimanje

RAZRED: Prvi i drugi

SVRHA: Upoznavanje s pojmom mjerenja, vježbanje oduzimanja

BROJ UČENIKA: Radi cijeli razred zajedno s učiteljicom

PRIBOR: Svaki učenik dobije 50 kockica i list za mjerenje i pogađanje (broj kockica varira s obzirom na veličinu predmeta koji će se mjeriti)

UPUTA: Učiteljica priredi popis predmeta koje će učenici mjeriti. Ti predmeti mogu biti olovka, prijateljeva cipela, pernica, visina i širina udžbenika, ravnalo, širina naslona stolice, visina noge klupe, duljina vlastitog dlana i sl.

Učitelj čita predmete s popisa, a učenici najprije upisuju naziv predmeta koji trebaju izmjeriti, zatim pokušavaju procijeniti kolika mu je dužina u kockicama i to upisuju u odgovarajući stupac.

Nakon toga mjere zadani predmet slažući kockice u niz i zapisuju izmjerenu duljinu predmeta u sljedeći stupac. Zatim izračunavaju razliku između pogađane i izmjerene veličine i to upisuju u posljednji stupac (te razlike su veličine pogreške u procjeni, pa je svejedno je li duljina predmeta podcijenjena ili precijenjena). Na koncu učenici zbrajaju razlike. Pobjednik je onaj učenik koji ima najmanju sumu razlika.

VARIJACIJE ZADATKA: Možete mjeriti predmete različitih duljina - vrlo kratke ili vrlo duge. Raspravite s djecom kad više griješe i zašto.

Možete raditi i u skupinama po 4 učenika, pa da djeca u skupini zajednički mjere.

LIST ZA POGAĐANJE I MJERENJE

Predmet mjerenja	Pogađanje	Mjerenje	Razlika
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
		Zbroj	

11. Tko će prije do 100?

GRADIVO: Mjesne vrijednosti do 100 i zbrajanje

RAZRED: Drugi

SVRHA: Uvježbavanje zbrajanja i prenošenja desetica

BROJ DJECE: Skupine od po 4 djece

PRIBOR: Svako dijete dobija podlogu s mjesnim vrijednostima za jedinice i desetice (dva stupca po deset polja). Kocka za igranje i žeton na kojem je s jedne strane napisano 1, a s druge 10. Deset kockica crvene boje za desetice i 20 kockica zelene boje za jedinice.

UPUTA: Prvi igrač najprije baci žeton, a zatim kocku. Broj na žetonu mu kazuje računa li s jedinicama ili deseticama. Broj od 1 do 6 pokazuje koliko kockica mora uzeti.

Naprimjer, ako se na žetonu pokaže 1, znači da mora kockice stavljati na stupac s jedinicama. Zatim baci kocku na kojoj se pokaže 6. Uzima 6 zelenih kockica i pokriva odgovarajući broj polja u stupcu za jedinice. Ako je, primjerice, tamo već 5 polja pokriveno, sa svojih 6 pokriva stupac do kraja. 10 zelenih kockica mijenja za jednu crvenu i stavlja je u stupac za desetice, a preostalu zelenu stavlja u stupac s jedinicama.

Pobjednik je onaj igrač koji prvi stigne do ili pređe preko 100.

VARIJACIJE ZADATKA: Račun se svaki put može zapisati i provjeriti na papiru tako da se zbroji stanje s novim brojem koji se pridodaje.

Učenici se mogu natjecati sami sa sobom, tako da igraju npr. 5 puta i utvrde u kojoj im je igri trebao najmanji broj bacanja da postignu sto. Međusobno mogu usporediti rezultate.

10	1

12. Skoči na razliku

GRADIVO: Oduzimanje brojeva do 100

RAZRED: Drugi

SVRHA: Vježbanje oduzimanja kroz igru

BROJ UČENIKA: Podijelite učenike u skupine po 4

PRIBOR: Svaki igrač dobije 20 kockica jedne boje (dakle 4 različite boje kockica za skupinu), jedna podloga s upisanim brojevima od 1 do 100 (10 x 10), papirnata vrećica s karticama brojeva od 1 do 100 (izrežite ih iz kartona i napišite na svaku po jedan broj od 1 do 100).

UPUTA: Prvi igrač izvuče iz vrećice dvije kartice. Oduzme napamet manji broj od većeg. Nakon što je to učinio stavi kockicu svoje boje na podlogu tamo gdje je upisan broj jednak razlici (skoči na razliku). Nakon toga vrati kartice u vrećicu, promiješa ih i doda sljedećem igraču. Ako je pogrešno izračunao mora povući svoju kockicu, a igrač koji je sljedeći na redu i točno je izračunao može staviti svoju kockicu na podlogu. Ako je broj na podlozi već pokriven u prijašnjim izvlačenjima igrač slaže svoju kockicu povrh nje.

Pobjednik je igrač koji ima pokrivena tri polja u nizu (vodoravno, okomito ili po dijagonali, a moguća je i varijanta tri kockice jedna na drugoj).

VARIJACIJE ZADATKA: Igra se može produžiti zahtjevom da pobjednik mora imati pet pokrivenih polja u nizu.

Oduzimanje se može izračunavati i pismeno.

Ista igra može se igrati i za zbrajanje, ali onda rabite samo kartice do 50.

13. Čarobni kvadrat

GRADIVO: Zbrajanje do 15

RAZRED: Prvi, drugi, treći

SVRHA: Razumijevanje različitih kombinacija pribrojnika u zbroju

BROJ UČENIKA: Male skupine do 4 učenika

PRIBOR: Svaka skupina dobije 45 kockica i dva lista s čarobnim kvadratom koji ima 3 x 3 polja (jedan list veličine A-3 i drugi veličine A-4).

UPUTA: Zadatak učenika jest da rasporede kocke po poljima čarobnog kvadrata tako da se u svakom polju nalazi različit broj kockica (od 1 do 9), te da zbroj kockica u svakom stupcu i redu iznosi 15. Kockice raspoređuju na listu veličine A-3, a odgovarajući rezultat upisuju na list A-4.

Na kraju skupine međusobno provjeravaju i uspoređuju čarobne kvadrate.

VARIJACIJE ZADATKA: Moguće je odmah složiti raznobojne stupce od 1 do 9 pa stupce raspoređivati u čarobni kvadrat.

			15
			15
			15
15	15	15	

14. Tko će prije do 1000?

GRADIVO: Mjesne vrijednosti i zbrajanje do 1000

RAZRED: Treći i četvrti

SVRHA: Razumijevanje mjesnih vrijednosti i "prenošenja" vrijednosti kod zbrajanja

BROJ UČENIKA: Radi se u malim skupinama po 4 do 5 učenika

PRIBOR: Svaki igrač dobije 3 skupine po 20 kockica (svaka skupina od 20 kockica različite je boje, pri čemu jedna boja predstavlja jedinice, druga desetice, a treća stotice), podlogu s mjesnim vrijednostima (u prilogu vježbe) i prazan list papira za pismenu provjeru. Svaka skupina djece dobiva i papirnatu vrećicu s karticama brojeva od 1 do 100 (izrežite ih iz kartona i napišite na svaku po jedan broj od 1 do 100).

UPUTA: Vrećica s karticama stavi se na sredinu stola među igrače. Svaki igrač izvlači jednu kartu, pročita je i stavi odgovarajući broj kockica na svoju podlogu s mjesnim vrijednostima. Karta se vrati u vrećicu i sljedeći igrač izvlači svoju kartu. Sljedeći put igrač pribraja izvučeni broj na onaj već postojeći, ali to radi slažući kockice na podlogu s mjesnim vrijednostima.

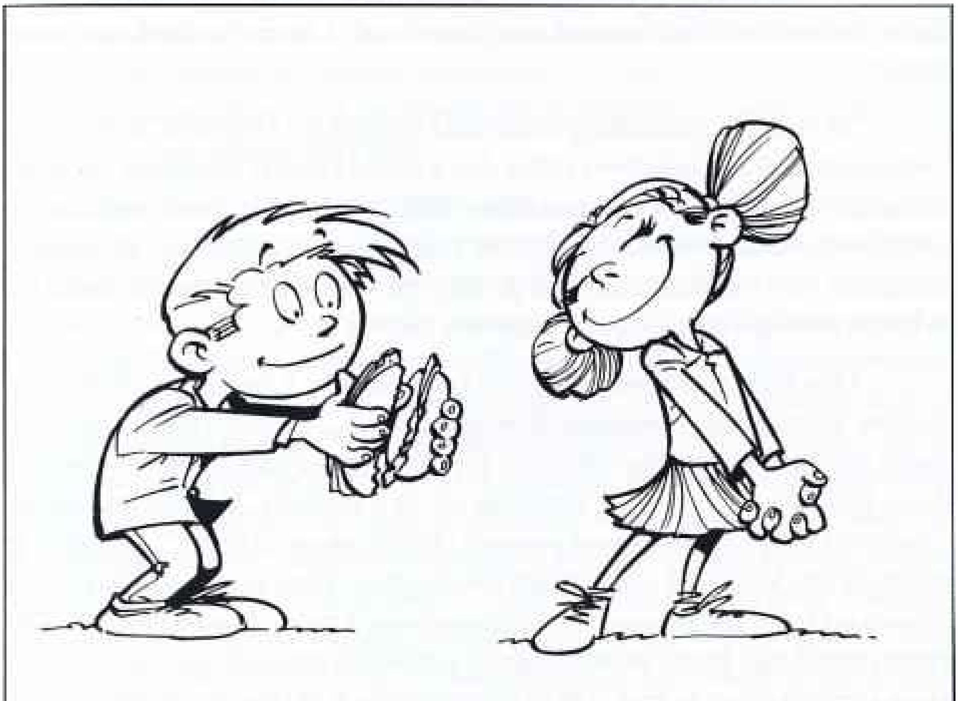
Kako se igra razvija bit će potrebno mijenjati deset jedinica za jednu deseticu, deset desetica za jednu stoticu. Ako, primjerice, igrač ima na svojoj podlozi složeno 268 i izvuče broj 79, to znači da će morati obaviti dva prenošenja. U koloni s jedinicama imat će 17 jedinica (a treba imati samo 9), pa će 10 jedinica zamijeniti jednom deseticom, a u stupcu s jedinicama ostat će mu 7 kockica. No, i u stupcu s deseticama ima već složeno 13 kockica i još jednu koja je zamjena kockica iz stupca jedinica. Stupac s deseticama je prepunjen, pa će igrač zamijeniti 10 deseticnih kockica jednom stoticom. Stanje u stupcima izgleda ovako: 3 kockice jedne boje u stupcu sa stoticama, 4 kockice druge boje u stupcu s deseticama i 7 kockica treće boje u stupcu s jedinicama. Trenutni broj kojim igrač raspolaže je 347. Pobjednik je igrač koji prvi postigne 1000 ili više.

VARIJACIJE ZADATKA: U svrhu provjere učenici mogu na praznom papiru pismenim putem izračunati rezultat.

100	10	1

3.

Kad podijelim imat ću više - kognitivni aspekti množenja i dijeljenja



3.1. Ideje o množenju i dijeljenju

Kad većina djece uspješno svlada zbrajanje i oduzimanje započinje pouka iz množenja i dijeljenja. Uobičajena je zamisao kako su ove matematičke operacije logičan nastavak pouke o zbrajanju i oduzimanju, te da za uspješno usvajanje množenja i dijeljenja nisu potrebne veće promjene u dječjem načinu razmišljanja. Poučavanje množenja najčešće započinje prikazom množenja kao skraćenog zbrajanja, tj. množenje je "uzastopno zbrajanje istih pribrojnika". Tako je 4×3 u takvoj pouci jednako $3 + 3 + 3 + 3$. Objašnjavanje dijeljenja pomoću oduzimanja nešto je rjeđe.

Pojmovi množenja i dijeljenja mogu se objašnjavati i na druge načine, npr. dijeljenje kao podjela na jednake dijelove ili pomoću množenja.

No neke ideje o množenju i dijeljenju zajedničke su velikom broju djece i odraslih: ideja da množenje "povećava" i ideja da dijeljenje "smanjuje".

Te su ideje posljedica povezivanja množenja i zbrajanja, te dijeljenja i oduzimanja. Relativno brzo i lako djeca nauče kako je množenje skraćeno zbrajanje. Ukoliko tu ideju razvijamo dalje to znači da ćemo množenjem dobiti veći rezultat nego što su faktori koje smo pomnožili, jer i zbrajanjem dobijemo veći rezultat nego što je broj od kojeg smo krenuli (djeca su svladala ove operacije u skupu prirodnih brojeva).

Ova ideja je prema Fischbeinu i suradnicima u suglasju s našim intuitivnim shvaćanjem množenja (Fischbein i sur., 1985.). Oni su ispitivali dječji odabir matematičke operacije u problemskim zadacima, pri čemu su djeca trebala samo odabrati operaciju ali ne i računati. U zadacima poput: "*Svako od troje djece ima po 4 naranče. Koliko imaju zajedno*?", problem se može riješiti kao $4 + 4 + 4$. Isto pravilo može se prenijeti i na zadatke kao: "*Svako od troje djece ima vrč s 2.8 litara soka. Koliko imaju zajedno*?". Ovi zadaci množenja mogu se bez ikakvih poteškoća tumačiti kao zadaci zbrajanja i većina djece to čini. Takva interpretacija u skladu je s našim "primitivnim, intuitivnim" razumijevanjem množenja kao skraćenog zbrajanja.

No množitelj i množenik mogu biti razlomci ili decimalni brojevi, što dodatno otežava rješavanje zadatka. Zadaci u kojima se rabe potpuno jednaki brojevi mogu biti različito teški. Tako je Greer (1992.) pokazao da je zadatak: "*Raketa leti brzinom od 16 milja u sekundi. Koliko daleko je otputovala u 0.85 sekundi?*" teži od zadatka: "*Raketa leti brzinom od 0.85 milja u sekundi. Koliko daleko je otputovala u 16 sekundi?*". Iako je točno rješenje oba zadatka 16 x 0.85, u prvom zadatku mnoga djeca pretpostavljaju da se točno rješenje dobiva dijeljenjem 16 : 0.85. Nalazi istraživanja pokazuju kako je veličina množitelja od presudne važnosti za težinu zadatka, dok je množenik manje bitan.

U prva četiri razreda osnovne škole još nema tako "teških" zadataka, međutim već u petom razredu pojavljuju se decimalni brojevi. U situacijama koje zahtijevaju množenje s decimalnim brojevima djeca znatno češće griješe u odabiru točne operacije i u izvedbi algoritma, a situacija je još teža ukoliko je množitelj decimalni broj manji od 1 a veći od 0. U slučaju takvog množitelja umnožak će biti manji od množenika (npr. 20 x 0.5 = 10). Rezultat je u suprotnosti s uvriježenom idejom da množenje "povećava" - nakon množenja imamo manje nego u početku. Mnoga djeca ne uviđaju svoje pogreške pri množenju s brojem manjim od 1, a većim od 0 ($0 < x < 1$) ukoliko dobiju rezultat veći od množenika. Zbog ideje da je množenje skraćeno zbrajanje ona i očekuju veći broj.

Fischbein i suradnici smatraju kako za dijeljenje postoje dva "primitivna, intuitivna" modela (Fischbein i sur., 1985.). Jedan nazivaju "podjela" i on se odnosi na dijeljenje na jednake količine, npr.: "*Ivan želi 10 jabuka podijeliti petorici svojih prijatelja. Koliko će dobiti svaki?*". Drugi model je "razmjerno" dijeljenje koje govori koliko se podkoličina određene veličine nalazi u zadanoj količini, npr.: "Koliko čaša od 2 dl tekućine treba da bi se napunila posuda od 8 dl?". Kod podjele djeca, ali i odrasli ispitanici, imaju ideju kako djeljenik mora biti veći od djelitelja. Situacija im je puno lakša ukoliko je djelitelj prirodni broj, a očekuju i da će količnik biti manji od djeljenika (pogreška "dijeljenje smanjuje"), što naravno nije točno u slučajevima kad je djelitelj broj između 0 i 1. U zadacima razmjernog dijeljenja javlja se očekivanje da djeljenik mora biti veći od djelitelja (pogreška "veće se dijeli s manjim"). Fischbein i suradnici (1985.) drže kako je podjela originalni intuitivni model dijeljenja, dok se razmjerni model usvaja kasnije kroz školovanje.

Sa sigurnošću se može tvrditi kako djeca neke situacije množenja i dijeljenja upoznaju i prije škole. Međutim njihovo iskustvo je ograničeno na cijele brojeve, a i rano školsko poučavanje ograničava se na te slučajeve.

Podrazumijevamo da će djeca "shvatiti" o čemu je riječ pa im tijekom školske pouke ne ukazujemo kako postoje slučajevi u kojima množenjem dobivamo manje, a dijeljenjem više. U trenutku kad se poučava množenje i dijeljenje decimalnim brojevima manjima od 1, očekujemo da djeca razumiju pravila i procedure računanja. No, ne smatramo nužnim s djecom raspraviti nove situacije i nova rješenja koja nisu u skladu s tzv. "intuitivnim, primitivnim modelima" množenja i dijeljenja.

Na žalost, u poučavanju matematike premalo vremena posvećujemo raspravi o dječjim očekivanjima i hipotezama. Školsko gradivo usmjereno je na poučavanje postupaka uz pretpostavku da djeca razumiju ili će kroz pouku postupka sama shvatiti pojmove o kojima je riječ. Matematika je predmet u kojem se tzv. proceduralno i konceptualno znanje isprepliću. Proceduralno znanje odnosi se na poznavanje matematičkog postupka, poznavanje pravilnog izvođenja algoritma. Većina djece uspješno će svladati postupke nužne u osnovnoškolskoj matematici. U početku će griješiti pri množenju i dijeljenju višeznamenkastih ili decimalnih brojeva. No takve pogreške su uobičajene i razmjerno lako se uočavaju, te primjerenom vježbom ispravljaju.

Međutim, postupak uvježban do savršenstva, dakle usvojeno proceduralno znanje, još uvijek nije znak da dijete razumije matematički pojam o kojem je riječ (npr. množenje ili dijeljenje). Pitanje je razumiju li djeca čemu te procedure i što one stvarno predstavljaju? Konceptualno znanje podrazumijeva povezan sustav podataka (znanja) s jasnim međusobnim odnosima. Novo znanje ili novi pojam se razumijevanjem povezuju u postojeći sustav. Bez konceptualnog znanja, tj. bez stvarnog razumijevanja pojmova, dijete može znati izvesti proceduru (npr. pomnožiti ili podijeliti dva broja), ali neće znati kad tu proceduru valja primijeniti (u kojim situacijama treba brojeve pomnožiti, a kad ih valja podijeliti). U metodičkim priručnicima uz udžbenike matematike ističe se kako je lakše djecu poučiti pravilima izvođenja postupaka nego razviti razumijevanje pojmova. No bez razumijevanja matematičkih pojmova nema razumijevanja matematike. Proceduralno i konceptualno znanje se isprepliću, ali valja istaknuti važnost poučavanja pojmova - bez njih su postupci samo znanja s kojima ne znamo što bismo započeli u stvarnom životu.

3.2. Situacije u zadacima množenja i dijeljenja

Prije pouke o množenju i dijeljenju djeca su već svladala zbrajanje i oduzimanje. Upoznala su situacije u kojima je bilo riječi o udruživanju, odnosno razdvajanju dva skupa - jedan skup pridružio se ili izdvojio kao podskup iz drugog skupa ili su se skupovi međusobno uspoređivali. No, spomenute situacije specifične su za zbrajanje i oduzimanje. Njihovo poznavanje nije jamstvo da su djeca spremna za pouku novih matematičkih operacija. Iako se neke situacije množenja mogu prepoznati kao situacije zbrajanja, u množenju i dijeljenju postoji čitav niz novih, djeci nepoznatih situacija i odnosa. Poučavanje pojmova (konceptualnog znanja) podrazumijeva i poučavanje tih situacija, a ne samo postupaka računanja.

Međutim, broj različitih situacija u zadacima množenja i dijeljenja vrlo je velik i u psihologijskoj literaturi još ne postoji njihova jedinstvena klasifikacija. U uporabi su razne klasifikacije zadataka (Greer, 1992.; Nesher, 1992.; Vergnaud, 1988.), no za početno poučavanje matematike čini nam se najprikladnijom razmjerno jednostavna klasifikacija koju daju Nunes i Bryant (1996.). Njihova klasifikacija razlikuje tri osnovne skupine situacija koje se javljaju u zadacima:

1. pridruživanje "jedan prema više",
2. istodobnu promjenu dviju veličina,
3. podjelu i dijeljenje.

Ovdje je riječ o novim značenjima brojeva koje valja razumjeti da bi se zadaci uspješno riješili. Novi odnosi su složeni i podrazumijevaju postojanje ili razvoj nekih novih znanja.

Pridruživanje "jedan prema više"

Djeci je odnos "jedan prema jedan" poznat još iz brojenja, a kasnije su ga rabili pri rješavanju zadataka zbrajanja i oduzimanja. No sad se pojavljuje odnos "jedan prema više", npr. "jedan prema dva" (jedan dječak ima dva uha), "jedan prema četiri" (jedan stol ima četiri noge), "jedan prema sedam" (jedan kamion preveze sedam tona ugljena), itd. Pritom je riječ o diskontinuiranim varijablama, tj. skupovima koji sadrže razdvojene elemente (matematički rečeno diskretnim elementima).

U novim situacijama omjer pridruživanja je stalan (1 : x). On je nepromjenljiv i ako ga se želimo pridržavati svaki put kad npr. povećamo broj stolova za jedan povećat ćemo broj nogu za četiri. Sad skupovima ne pridružujemo jednak broj elemenata kao što smo to radili pri odnosu pridruživanja "jedan prema jedan", već poštujemo zadani omjer ("jedan prema četiri").

Nunes i Bryant (1996.) navode kako operacija koja održava omjer stalnim nije više pridruživanje ili razdvajanje skupova već ponavljanje, preslikavanje skupa ili ponavljanju suprotna operacija (npr. ako iz skupa stolova izdvojimo jedan stol iz skupa nogu moramo izdvojiti četiri noge). Omjer ostaje stalan i kad se broj stolova i nogu mijenja (3 stola i 12 nogu; 10 stolova i 40 nogu...), jer on ne opisuje broj elemenata u skupovima, već odnos među skupovima.

U pridruživanju "jedan prema više" uvodi se još jedan novi pojam - - broj koliko puta je izvršena operacija ponavljanja (preslikavanja) skupova. Ako je riječ o stolovima i nogama, u početku imamo jedan stol i četiri noge. Ako početno stanje ponovimo 5 puta imat ćemo 5 stolova i 20 nogu, pri čemu je 5 broj ponavljanja skupova. Da bi omjer elemenata ostao stalan, isti broj ponavljanja valja primjeniti na oba skupa.

Tako razumijevanje pridruživanja "jedan prema više" zahtijeva od djece razumijevanje dva nova značenja brojeva: značenje omjera i značenje broja koji definira količinu ponavljanja skupova.

Istodobna promjena dviju veličina

Sasvim nove odnose i nova značenja brojeva možemo naći u situacijama u kojima je riječ o istodobnoj promjeni dviju veličina (kovariranju varijabli). Dvije varijable mogu kovarirati kao posljedica dogovora ili zbog uzročno-posljedičnih odnosa. Ukoliko je riječ o dogovoru on može biti naknadno promijenjen, ali dok vrijedi dogovor vrijedi i način istodobne promjene dviju veličina. Primjer dogovorne istodobne promjene je cijena nekog proizvoda (npr. ako je cijena 1 kg šećera 6 kn onda je cijena 3 kg šećera 18 kn). Uzročno-posljedična istodobna promjena znači da jedna promjenljiva veličina utječe na drugu (npr. ako 10 kg tereta istegne oprugu 10 cm onda će je 20 kg istegnuti 20 cm).

Pri istodobnoj promjeni riječ je o kontinuiranim varijablama, a ne o diskontinuiranim elementima u skupovima. Ta činjenica omogućava pojavljivanje novog pojma - razlomka. Moguće je zapitati koliko stoji 1/2 kg šećera ili koliko će oprugu istegnuti za 1/4 lakši teret. Kad smo govorili o diskontinuiranim elementima takva pitanja baš nisu imala puno smisla. Primjerice, nije smisleno zapitati koliko nogu ima 1/5 stola ili koliko tona ugljena mogu prevesti 4 1/2 kamiona.

Neki zadaci kovariranja mogu se svesti na pridruživanje "jedan prema više". Preslikavanjem elemenata moguće je riješiti zadatak: "*Ako 1 kg šećera stoji 6 kn, koliko stoji 5 kg šećera*?". No, ako zadatak glasi: "*Ako 1 kg šećera stoji 6 kn, koliko stoji 0.72 kg šećera*?" nije ga moguće riješiti preslikavanjem (ponavljanjem) elemenata iz zadanih skupova. U takvim zadacima pojavljuju se brojevi s novim značenjem, a to je cijena po jedinici mjere (cijena šećera po kilogramu). Bez razumijevanja značenja te jedinične cijene dijete ne može odgovoriti na pitanje: "*Je li isplativije kupiti 5.5 kg šećera po cijeni od 31.9 kn ili 6.2 kg šećera po cijeni od 35.34 kn*?".

Razumijevanje zadataka s istodobnom promjenom veličina od djeteta zahtijeva razumijevanje ideje razlomka, odnosno dijelova cjeline, kao i razumijevanje značenja broja koji govori o odnosu između dvije varijable.

Podjela i dijeljenje

Treća skupina situacija odnosi se na dijeljenje. Mnoga djeca imaju iskustva s podjelom, npr. kako podijeliti bombone sebi i prijateljima, a da pritom svatko dobije jednak broj bombona. Nunes i Bryant (1996.) kažu da odrasli mogu tu situaciju vidjeti kao pridruživanje "jedan prema više", ali da je djeca vide kao posebnu situaciju dijeljenja.

Naime, dvije su specifičnosti ove situacije. Kao prvo, riječ je o raspodjeli koja se događa u ovom trenutku i nije unaprijed poznat omjer pridruživanja. Drugo važno obilježje situacije dijeljenja jest da valja istodobno voditi računa o tri varijable koje su u igri: ukupnom broju bombona, broju djece i broju bombona po djetetu. Jednostavna situacija podjele postaje prava situacija dijeljenja kad djeca shvate međusobnu povezanost navedenih varijabli. Tako djeca moraju razumjeti da ako je broj bombona stalan, a mijenja se broj djece (npr. raste) nužno se mijenja i broj bombona po djetetu (opada). Isto tako, ako je broj djece stalan, a mijenja se broj slatkiša (npr. raste) također se mijenja i broj slatkiša po djetetu (raste).

Ovakvo dijeljenje moguće je izvoditi i s količinama koje zahtijevaju razumijevanje brojeva manjih od 1, tj. u situacijama dijeljenja često se pojavljuju i razlomci ("Četiri prijatelja trebaju podijeliti 10 čokolada. Koliko će dobiti svaki?").

Razmislite li ponovno o pojmovima množenja i dijeljenja vjerojatno vam se sve čini mnogo složenije nego u početku. Učitelji najbolje znaju da se djecu može naučiti postupcima množenja i dijeljenja, ali može li ih se poučiti svim tim složenim situacijama o kojima je bilo riječi i ima li to smisla? Ako tvrdimo da djeca trebaju razumjeti pojmove (konceptualno znanje), a ne samo postupke (proceduralno znanje) onda takva pouka ima smisla. No zahtjevi koje nove situacije postavljaju pred djecu složeni su i s pravom se pitamo mogu li ih djeca razumjeti i u kojoj dobi? Tražimo li, možda od njih previše ili/i prerano?

3.3. Razumiju li djeca o čemu je riječ?

Piaget je smatrao da operacije množenja i dijeljenja predstavljaju kvalitativnu promjenu u dječjem mišljenju. Ispitivanja su pokazala da dječje razumijevanje ovih pojmova nije nužno nastavak razumijevanja zbrajanja i oduzimanja. Naime, već u dobi od 5 godina djeca razumiju situacije pridruživanja "jedan prema više" (Piaget, prema Nunes i Bryant, 1996.).

Slične rezultate iznose Frydman i Bryant (1988.). U njihovom ispitivanju četverogodišnjaci i petogodišnjaci dijelili su zamišljene kolačiće (kockice) dvjema lutkama. Ukoliko je kolačić bio predstavljen jednom kockicom djeca su bez poteškoća pridruživanjem "jedan prema jedan" raspodijelila sve kolačiće. Nakon toga rečeno im je kako jedna lutka voli dobivati kolačiće složene kao dvije kockice jedna na drugoj, a druga voli dobivati kolačiće u obliku jedne kockice. Zadatak je opet bio podijeliti jednak broj slatkiša objema lutkama. Ovakav zadatak uspješno je riješilo 70 % petogodišnjaka, ali samo 4 % četverogodišnjaka. Naime, četverogodišnjaci su istodobno jednoj lutki davali po dvije složene kockice, a drugoj lutki samo po jednu kockicu. Kako bi ispitali zbog čega djeca griješe, Frydman i Bryant organizirali su dodatno ispitivanje. Dječji zadaci bili su jednaki kao u prethodnom ispitivanju, ali je između njih umetnut novi zadatak. U umetnutom zadatku uvedene su kockice različite boje (žute i plave). Djeci je rečeno kako jedna lutka voli kolačiće složene kao dvije kockice jedna na drugoj, ali tako da jedna kockica bude žuta, a druga plava. Za drugu lutku rečeno je da voli kolačiće u obliku jedne kockice. U tom zadatku djeca su bila uspješna, tj. kad bi jednoj lutki dala slatkiš složen od žute i plave kockice drugoj lutki bi dala po jednu žutu i jednu plavu kockicu. Isti način raspodjele djeca su rabila i u ponovljenom zadatku s jednobojnim kockicama i s lakoćom svladala zadatak. Autori zaključuju kako petogodišnjaci spontano, a četverogodišnjaci nakon male intervencije razumiju pridruživanje "jedan prema više". No to još uvijek ne znači da su sposobni riješiti zadatke s brojevima.

Rezultati ispitivanja pokazuju da su tek s 8 do 9 godina djeca spremna izvesti pridruživanje "jedan prema više" u zadacima u kojima se traži brojčani odgovor. Pritom uspješnost rješavanja ovisi o vrsti zadatka i dostupnim pomagalima. Bryant i suradnici (prema Nunes i Bryant, 1996.) zadavali su skupini osmogodišnjaka i skupini devetogodišnjaka dvije vrste zadataka množenja. Jednu vrstu predstavljali su jednostavni zadaci pridruživanja "jedan prema više" (npr.: "*Jedan kamion preveze 4 tone ugljena. Koliko prevezu 3 takva kamiona*?"), a drugu vrstu složeniji zadaci koji predstavljaju tzv. Kartezijev produkt (npr: "*Djevojčica ima 4 bluze i 3 suknje. Na koliko različitih načina se može odjenuti*?"). Pri rješavanju zadataka djeca su rabila kockice. U polovici zadataka bile su im dostupne sve kockice potrebne za rješavanje zadataka, a u drugoj polovici samo kockice nužne da se zadatak postavi, a do rješenja su morala doći računanjem. Rezultati pokazuju da su devetogodišnjaci uspješniji od osmogodišnjaka, a jednostavni zadaci lakši, bez obzira na dostupna pomagala. U teškim zadacima (Kartezijev produkt) djeca imaju više uspjeha ukoliko su im dostupne sve potrebne kockice, a osmogodišnjaci ni ne mogu riješiti ove zadatke bez svih kockica. Oni koji su Kartezijev produkt tumačili kao pridruživanje "jedan prema više" bili su uspješniji, ali autori sugeriraju kako djeca moraju sama otkriti taj odnos.

Ispitivanja pokazuju da djeca razmjerno rano, u dobi od 6 do 7 godina, razumiju i situacije podjele i dijeljenja. Djeca su u stanju predvidjeti kako će u situaciji u kojoj je više zečića na zabavi svaki zečić dobiti manje hrane nego ako je uz istu količinu hrane prisutno manje zečića (Correa, prema Nunes i Bryant, 1996.). Poučavanje rješavanja zadataka sa situacijama dijeljenja valja povezivati s dječjim iskustvom, pa će djeca biti uspješnija.

Zadatke kovariranja koji se mogu predstaviti kao pridruživanje "jedan prema više" mogu uspješno riješiti i djeca mlađa od 10 godina. Međutim, ukoliko je za rješenje nužno razumjeti funkcionalan odnos (npr. cijenu po jedinici proizvoda) takvi su zadaci djeci teški i mlađa djeca ih ne mogu riješiti. No, kao i u situacijama dijeljenja, djeca su uspješnija ako se zadaci odnose na njihovo stvarno životno iskustvo (Baranes i sur., 1989.; Saxe, 1988.).

Možemo zaključiti kako djeca razmjerno rano (u dobi od 4 do 5 godina) razumiju pridruživanje "jedan prema više", ali su za rješavanje zadataka spremna tek kasnije. Gotovo isto tako rano djeca razumiju o čemu je riječ i u situacijama dijeljenja, ali, naravno, ne mogu još računati. Najteže su razumljive situacije istodobne promjene dviju veličina, pogotovo ako se ne mogu svesti na djeci dostupno pridruživanje "jedan prema više". Njih djeca mogu uspješno rješavati tek u višim razredima osnovne škole.

Prije rješavanja zadataka valjalo bi s djecom raspravljati o odnosima u zadacima, posebno kad je riječ o teškim zadacima. Dostupnost pomoćnog materijala (npr. kockica) olakšava razumijevanje i rješavanje zadataka, a nakon uvježbavanja može se raditi i sa djelomičnim materijalom, tj. materijalom dostatnim da se zadatak samo postavi.

3.4. Aktivnosti

1. Izgradimo množenje

GRADIVO: Množenje brojeva do 5 x 5

RAZRED: Drugi

SVRHA: Razumijevanje množenja - vizualizacija množenja kroz rad s pomagalima (kockice)

BROJ UČENIKA: Svaki učenik radi pojedinačno, može istovremeno cijeli razred ili samo jedna skupina

PRIBOR: 30 kockica iste boje, podloga sa 10 x 10 mjesta za kockice, tri numeričke rečenice (npr. 2 x 3 =), dva puta po tri prazna papirića za rezultat (to je pribor za svakog pojedinog učenika). (Slika prikazuje podlogu s točno poslaganim kockicama i numeričke izraze na koje još valja upisati odgovor).

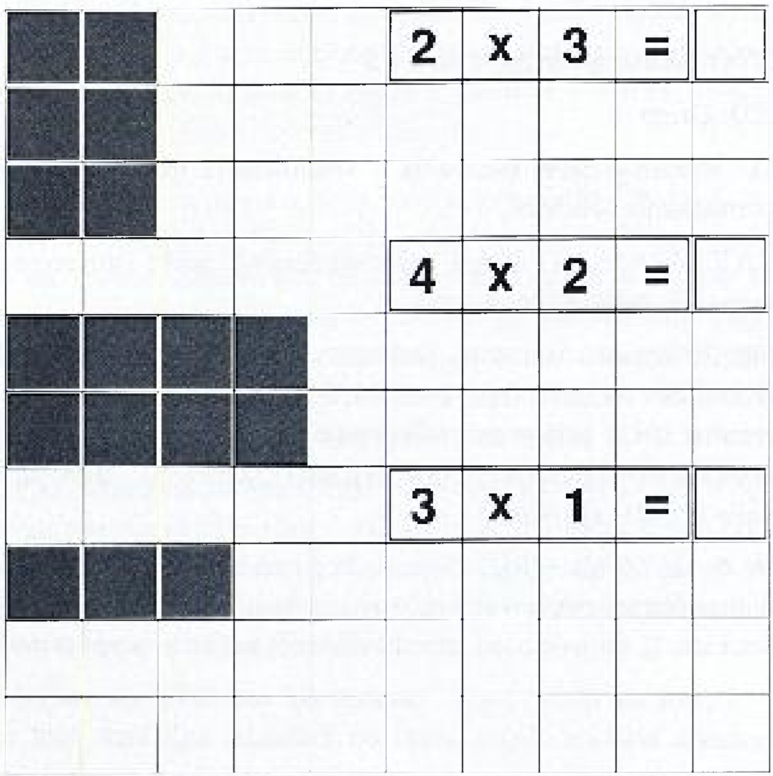
UPUTA: Svaki učenik dobije svoju podlogu na koju mu složite njegove tri numeričke rečenice. Valja pripaziti da ima dovoljno mjesta za slaganje kockica, tj. da jedan red između složenih kockica ostaje prazan.

Uputa za djecu glasi: "Svatko od vas treba na svojoj podlozi pomoću kockica složiti svaki od zadataka koji sam vam dala. To možete napraviti ovako - npr. ako je zadatak 2 x 3 to znači dvije kockice složite tri puta (nacrtati na ploči). Kad složite neki zadatak prebrojite kockice i upišite rješenje zadatka na papirić. Taj papirić stavite na podlogu iza znaka = . Tako napravite za svaki zadatak, a kad ste gotovi pozovite me da pogledam kako ste to riješili."

Kad su djeca gotova pokupite njihove numeričke izraze i dajte im tri nova zadatka (od nekog drugog učenika). Neka ovaj put sve slože sami.

VARIJACIJE ZADATKA: Kad nauče množenje s 0 uključite i 0 kao faktor.

Konstruirajte numeričke izraze koji pokazuju komutativnost kao 2 x 3 = 3 x 2, pa neka ih djeca konstruiraju pomoću kockica.


2 x 3 =
4 x 2 =
3 x 1 =

2. Pomnoži po redu

GRADIVO: Množenje s faktorima do 6

RAZRED: Drugi

SVRHA: Uvježbavanje množenja i zbrajanja

BROJ UČENIKA: Podijelite učenike u male skupine od po 4 djeteta

PRIBOR: Za svaku skupinu učenika jedna kocka iz igre "Čovječe ne ljuti se". Po jedan bijeli papir za svakog učenika na koji će upisati izraze:

1 x =

2 x =

3 x =

4 x =

5 x =

UPUTA: Djeca redom bacaju kockicu. Pritom broj koji su dobila bacanjem kockice upisuju uz redni broj bacanja i izračunaju umnožak. Tako će dijete koje je prvi put bacilo kockicu i dobilo npr. 4 upisati u izraz 1 x 4 = 4. Nakon toga kockicu baca sljedeći igrač. Kad je ponovno na redu prvi igrač on baca kockicu i dobiveni broj (npr. 6) upisuje uz drugo bacanje: 2 x 6 = 12. Nakon što svi igrači završe svojih 5 bacanja izračunati umnošci se zbroje i pobjednik je onaj igrač koji ima najveći rezultat.

VARIJACIJE ZADATKA: Moguće je da dijete pri svakom bacanju slobodno odluči uz koji broj će upisati broj dobiven bacanjem (tako ako npr. iz prvog bacanja dobije 6 može odlučiti taj broj upisati uz faktor 5 kako bi dobilo što bolji konačni rezultat). Naravno svaki put mora dobiveni broj upisati uz jedan od brojeva od 1 do 5.

Moguće je izvoditi 5 puta po dva bacanja u kojima valja međusobno pomnožiti dva broja dobivena bacanjem kocke.

3. Podijelimo bombone

GRADIVO: Dijeljenje brojeva do 100

RAZRED: Drugi

SVRHA: Razjašnjavanje pojma dijeljenja, kako količnik ovisi o djelitelju u skupu prirodnih brojeva (diskontinuirane količine), kako količnik ovisi o djeljeniku

BROJ UČENIKA: Djecu podijeliti u skupine od po 4 učenika koji sjede oko stola

PRIBOR: Skup od 24 kockice jedne boje i skup od 36 kockica druge boje, za svaku skupinu po 6 papira veličine A-4 na koje će slagati kockice

UPUTA: Dajte svakoj skupini učenika 24 kockice i svakom učeniku po jedan bijeli papir. Recite im: "Sad ćemo zamisliti da su ove kockice bomboni. Ove bombone dijelit ćemo na različite načine. Prvo podijelite sve ove bombone Ivanu i Ani (učenici koji sjede nasuprot za stolom). Podijelite bombone tako da svatko od njih dobije jednak broj." Kada su gotovi upitajte: "Jeste li uspjeli podijeliti tako da Ivan i Ana imaju jednak broj bombona? Koliko ima svaki? Stavite bombone opet na sredinu stola. Sada ih podijelite Petru i Sanji (drugo dvoje djece za stolom). Prije nego počnete recite mi što mislite po koliko bombona će dobiti svatko od njih. Podijelite i provjerite.... Koliko bombona je dobio Petar? A Sanja? Dobro, sada stavite opet sve bombone na sredinu stola. Koliko bombona ima ukupno na stolu? Sada bombone podijelite tako da svatko od vas za stolom dobije jednak broj bombona... Koliko je dobio svaki učenik? Ako ponovo metnete sve bombone na hrpicu na sredinu stola i opet ih podijelite tako da svatko od vas dobije jednako koliko će svatko dobiti? Jeste li sigurni? Probajte ponovno!"

Kad isprobaju upitati: "Ima li opet svatko po 6 bombona? Dobro, vratite bombone na sredinu stola." Stavite na stol na dvije suprotne strane još po 1 papir. Tako je sada 6 papira na stolu - jedan za svakog učenika i 2 slobodna. Uputa glasi: "Zamislite sada da su za vaš stol sjela još 2 učenika. Ovo su njihovi papiri za bombone. Bombone ćete dijeliti i s njima. Podijelite bombone tako da sada svatko od vas dobije jednak broj bombona!.... Jeste li uspjeli? Koliko bombona ima svatko od vas? Ako bombone vratite na sredinu stola i opet ih podijelite na vas 6 tako da svatko dobije jednak broj, hoćete li opet dobiti po 4 bombona? Provjerite!.... Dobro da sad vidimo, kad ste bombone dijelili samo na dvoje svatko je dobio po 12 bombona. Kad ste bombone podijelili na vas 4 koji ste bili za stolom dobili ste svatko po 6 bombona, a kad ste bombone podijelili na 6 učenika dobili ste svatko po 4 bombona. Što to znači?... Dakle kad se djeljenik ne mijenja (a to je ukupan broj bombona), a mijenja se djelitelj (broj vas koji dobivate bombone) mijenja se i količnik (broj bombona koji dobije svaki učenik). Kako se mijenja količnik? Što je veći broj djece na koji dijelimo bombone manje će dobiti pojedino dijete. Što je veći djelitelj količnik će biti manji uz stalni djeljenik."

Na svaki stol stavite novi skup od 36 kockica i ponovite cijeli zadatak. Na kraju prokomentirajte: "Prvi put smo dijelili 24 bombona (to je bio naš djeljenik), a drugi put smo dijelili 36 bombona (to je naš drugi djeljenik). Sjetite se kad ste bombone dijelili na vas 4 za stolom. Koliko je svatko dobio prvi put?..... A drugi put? Što iz toga možemo zaključiti? Ako dijelimo različite količine bombona na isti broj učenika oni će dobiti različito. Ako je djeljenik veći dobiti će više."

VARIJACIJE ZADATKA: Zadatak možete isprobati i s većim brojevima za vježbu u trećem razredu. Također možete ilustrirati i dijeljenje s ostatkom.

4. Podijelimo kockice

GRADIVO: Dijeljenje s djeliteljem do 6

RAZRED: Drugi

SVRHA: Uvježbavanje dijeljenja na jednake dijelove

BROJ UČENIKA: Podijelite učenike u male skupine od po 4 djeteta

PRIBOR: Za svaku skupinu učenika jedna kockica iz igre "Čovječe ne ljuti se", 30 kockica i jedan papir za zapisivanje.

UPUTA: Djeca redom bacaju kockicu, a zajednički izvode dijeljenje. Onaj tko je bacio kockicu mora kasnije zapisati brojčani izraz. Skup od 30 kockica koje su pred njima moraju podijeliti s brojem koji su dobili bacajući kocku. Tako, ako je prvo dijete bacilo kocku i dobilo 3 trebaju kockice pred sobom podijeliti na tri jednaka skupa i izbrojiti kockice u svakom skupu. Zatim trebaju zapisati brojčani izraz za tu izvedenu operaciju (30 : 3 = 10). Ukoliko ne uspiju podijeliti tako da bude jednako u svakom skupu (30 : 4) neka zapišu koliko je bilo kockica u četiri skupa i koliko je kockica ostalo neraspodijeljeno. Ako se na kockici ponovi broj koji su već imali bacanje izvodi sljedeći igrač. Tako sve dok skup od 30 kockica ne podijele sa svim brojevima od 1 do 6.

VARIJACIJE ZADATKA: Moguće je da različite skupine djece dijele različito velike skupove kockica (npr. 24, 36, 40 kockica), pa kasnije prikažu drugim skupinama svoje rezultate.

5. Podijelimo lanac

GRADIVO: Dijeljenje brojeva do 100

RAZRED: Drugi i treći

SVRHA: Razumijevanje pojma dijeljenja, uzastopnog dijeljenja, pojašnjavanje “polovice”

BROJ UČENIKA: Podijeliti učenike u skupine od po 4 djeteta

PRIBOR: Svaka skupina dobiva 20 kockica jedne i 20 kockica druge boje, te papir.

UPUTA: “Složite lanac od kockica, ali tako da jedna polovica lanca bude jedne, a druga druge boje..... Može li se to složiti i drukčije? (može se zamijeniti redoslijed boja).

Podijelite sad taj lanac na dva dijela.... Koje boje je jedan dio, a koje boje je drugi dio? Znate li možda kako zovemo nove dijelove kad nešto podijelimo na dva dijela?... Možemo li lanac dalje dijeliti na jednake dijelove? (možemo, ali su dijelovi od različitih polovica različite boje). Neka jedna polovica lanca ostane cijela, a drugu dijelite dalje. Pokušajte i zapišite koliko ste puta uspjeli lanac podijeliti na potpuno jednake dijelove (ukupno 3 puta, ako zanemarimo boju). Koliko kockica imaju dijelovi lanca koje niste dalje mogli podijeliti na jednake dijelove? (5)...

Uzmite sada 16 kockica jedne i 16 kockica druge boje i napravite lanac koji ima svaku polovicu druge boje. Od koliko kockica se sastoji taj lanac? Podijelite ga na dva jednaka dijela i onda opet jednu polovicu na dva jednaka dijela koliko god puta to možete učiniti. Zapišite svaki put kad uspijete podijeliti lanac na jednake dijelove... Koliko ste puta uspjeli ovaj lanac podijeliti na jednake dijelove? (5)... Koliko kockica imaju dijelovi lanca koje niste uspjeli dalje podijeliti na jednake dijelove? (1)...

Kako to da ste dulji lanac od 40 kockica uspjeli podijeliti na jednake dijelove 3 puta, a kraći lanac od 32 kockice 5 puta? (neparni brojevi nisu djeljivi s 2).”

VARIJACIJE ZADATKA: Konstruirajte lance djeljive na različite dijelove (npr. 3 ili 5).

Konstruirajte lance koji imaju naizmjence jednu kockicu jedne pa onda druge boje. Na koliko se jednakih dijelova oni mogu podijeliti, ako pripazimo i na boju lanca?

Konstruirajte lance u kojima su dvije kockice jedne, pa dvije druge boje. Koliko se puta oni mogu dijeliti?

6. Neobična tombola

GRADIVO: Množenje brojeva i slaganje numeričkih rečenica

RAZRED: Treći i četvrti

SVRHA: Razumijevanje množenja - otkrivanje numeričkih izraza iz prikaza pomoću pomagala (kockica), slaganje numeričkih rečenica i računanje

BROJ UČENIKA: Svaki učenik radi pojedinačno - može istovremeno cijeli razred ili samo jedna skupina.

PRIBOR: 45 kockica iste boje, podloga sa 10 x 10 mjesta za kockice, kompleti zatamnjenih površina koji se slože na podlogu, bijeli papir za pisanje izraza (to je pribor za svakog pojedinog učenika).

Svaki učenik dobije komplet zatamnjenih površina čiji je ukupni zbroj 45 (slika prikazuje jedan mogući izgled takvog kompleta). Komplete valja izraditi tako da se za različite učenike variraju pribrojnici i faktori u njima, pa su tako npr. moguće kombinacije:

$1+6+8+10+20=45$ (slika u prilogu)

$1+4+9+15+16=45$

$2+4+6+8+25=45$

$2+3+5+10+25=45$

$2+5+6+12+20=45$

$2+4+9+15+15=45$

$3+4+8+10+20=45$

$3+5+10+12+15=45$

$3+4+6+12+20=45$

$4+5+8+12+16=45$

Od pribora treba još komplet kartica za onog tko izvlači tombolu (učiteljica ili jedan učenik).

Komplet kartica načinjen je od kartona i na svakoj kartici piše jedan umnožak faktora od 1 do 5. Svaka kartica ima tako jednu od kombinacija:

1 x 1, 1 x 2, 1 x 3, 1 x 4, 1 x 5,

2 x 1, 2 x 2, 2 x 3, 2 x 4, 2 x 5,

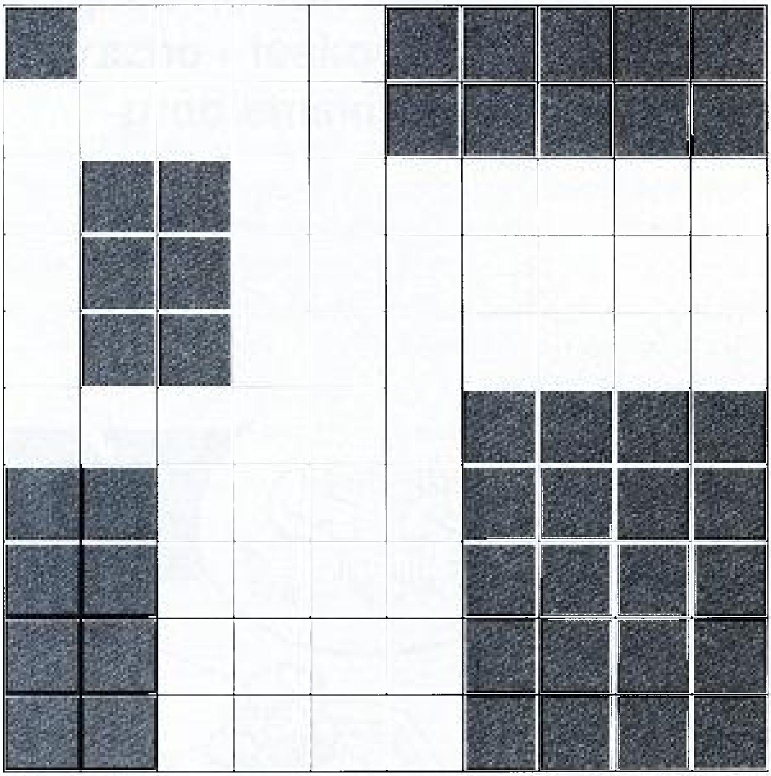
3 x 1, 3 x 2, 3 x 3, 3 x 4, 3 x 5,
4 x 1, 4 x 2, 4 x 3, 4 x 4, 4 x 5,
5 x 1, 5 x 2, 5 x 3, 5 x 4, 5 x 5.

UPUTA: Podijelite svakom igraču podlogu i njegov komplet zatamnjenih površina koje valja razmjestiti po podlozi te papir.

Učiteljica (ili neki učenik, tako da učiteljica može razgledati što djeca rade) izvlači iz vrećice jednu karticu iz kompleta kartica i čita je naglas. Dijete koje ima taj izraz na zatamnjenoj površini pokriva kockicama tu površinu i na bijeli papir ispisuje umnožak pročitane kartice. Nakon toga se izvlači sljedeća kartica i tako sve dok netko ne pokrije sve svoje zatamnjene površine. Taj učenik zbroji sve svoje umnoške i rezultat mora biti 45. Tko prvi to točno učini pobjednik je ove tombole.

VARIJACIJE ZADATKA: Kad su učenici svladali ovakvu tombolu, možete uvesti pravilo da mogu pokriti bilo koju površinu koju imaju ako je njezin umnožak jednak izvučenom. Npr. ako se izvuče kartica 3 x 4 učenik može pokriti i površinu 2 x 6, jer je u oba slučaja umnožak jednak.

Moguće je načiniti komplet kartica na kojem su samo umnošci, a učenici trebaju pokrivati odgovarajuće zatamnjene površine.



1 + 6 + 8 + 10 + 20 = 45
(1x1) + (2x3) + (2x4) + (5x2) + (4x5) = 45

4.

Zašto djeca ne vole bazene koji se pune i prazne - teškoće u rješavanju problemskih zadataka

4.1. Poučavati računanje ili problemske zadatke?

Problemski matematički zadaci često se smatraju jasnom vezom između dječjeg iskustva stečenog prije škole i školske matematike. Na žalost, školski programi vrlo rijetko koriste to dječje iskustvo, odnosno "prava" školska matematika započinje poučavanjem računanja.

Ispitivanja pokazuju kako bi obrnut put bio prikladniji. Zgodna ilustracija toga je istraživanje Suzanne Colvin (prema Krogh, 1994.). Ona je organizirala različito početno poučavanje matematike u tri odjeljenja prvog razreda. Pouka je trajala 7 tjedana. U odjeljenju A djeca su poučavana na klasičan način, tj. učila su računati, a učiteljica bi nakon toga ilustrirala neke račune pomoću problemskih zadataka. U odjeljenju B djeci su zadavani problemski zadaci vezani uz njihove interese. O tim bi zadacima djeca raspravljala, glumila ih ili crtala, a tek kad bi pronašla rješenje zadatka učiteljica bi pokazala simbolički prikaz rješenja brojkama. U odjeljenju C radilo se na sličan način kao u B, ali su simbolički prikazi rješenja problemskih zadataka (numerički izrazi) uvedeni tek u zadnja dva tjedna pouke. Prije pouke učenici su u sva tri odjeljenja pokušavali pogađati rješenja problemskih matematičkih zadataka. No, nakon pouke to su radili samo učenici iz A odjeljenja. Oni su poslije pouke smatrali da tekst zadatka smeta pri rješavanju i nisu pokazivali interes za problemske zadatke. Nakon pouke učenici iz B i C odjeljenja voljeli su problemske zadatke i rasprave o različitim načinima dolaska do rješenja, a pokazali su i bolje razumijevanje aritmetičkih simbola. Iako su djeca iz A odjeljenja više vježbala klasično zbrajanje i oduzimanje, sve su skupine izjednačene po uspjehu u računanju nakon poučavanja. Autorica zaključuje kako je za stvarno razumijevanje pojmova i dugoročne posljedice bolje započeti poučavanje matematike problemskim zadacima.

Verschaffel i DeCorte (1993.) su nakon proučavanja prakse u belgijskim školama uočili kako pouka u računanju uvijek prethodi problemskim zadacima, uz očekivanje da će djeca kasnije primijeniti naučene procedure pri rješavanju problema. Rezultati njihova jednogodišnjeg eksperimentalnog programa poučavanja matematike pokazuju da je bolje prvo poučavati problemske zadatke, a tek potom uvesti odgovarajuće brojčane izraze. Na taj način pouka započinje problemima s kojima djeca već imaju iskustva, a neke uspješno rješavaju i prije početka formalnog obrazovanja. Takva pouka poboljšava i razumijevanje brojčanih izraza koji služe kao simbolički prikaz problema.

I stručnjaci i laici složili bi se s tvrdnjom da matematika započinje misaonim predočavanjem problema. Nakon toga slijedi razmišljanje o putevima za rješavanje problema, a zatim dolazi do simboličkog prikazivanja brojčanim izrazima i izvođenja matematičkih operacija.

No, djecu u školi učimo kako rješavati njima apstraktne probleme kao npr. $3 + 4 = ?$ umjesto da pitamo: "Ako imaš 3 jabuke i ja ti dam još 4, koliko ćeš jabuka imati?". Umjesto razjašnjavanja pojmova zbrajanja i oduzimanja mi poučavamo procedure i očekujemo da će djeca znati odabrati i izvesti odgovarajući algoritam kad je on tražen u problemskom zadatku. Ne samo to, mi očekujemo da će dijete jednog dana znati riješiti i stvarni problem, a ne samo onaj "školski" - zadan na satu matematike.

Redoslijed poučavanja je izuzetno važno pitanje, ali to nije jedina teškoća kad je riječ o problemskim matematičkim zadacima. Naime, ispitivanja pokazuju kako djecu u školi najčešće poučavamo rješavanju problemskih zadataka koje ona uspješno rješavaju već prije škole, a sustavno zanemarujemo teže zadatke (Riley i Greeno, 1988.; Verschaffel i DeCorte, 1993.). Važno je razlikovati vrste problemskih zadataka, poznavati kognitivne zahtjeve koje zadaci postavljaju pred djecu i sustavno poučavati različite vrste zadataka.

4.2. Vrste problemskih zadataka

Danas uobičajenu psihologijsku klasifikaciju problemskih zadataka zbrajanja i oduzimanja uveli su Riley i suradnici. Prema njima problemski se zadaci mogu razvrstati u tri skupine: u zadatke kombiniranja, zadatke promjene i zadatke usporedbe (Riley i sur., 1983.). Svi ovi zadaci definiraju neke količine i opisuju odnose među njima. U zadacima kombiniranja riječ je o dva skupa koje valja ujediniti ili razjediniti, u zadacima promjene zbrajanje ili oduzimanje uzrokuje uvećanje ili umanjenje početne količine, a u zadacima usporedbe postoje dva statična skupa koji se ne mijenjaju već valja pronaći razliku među njima. Unutar svake od ove tri glavne skupine zadataka postoje i dodatne podjele s obzirom na položaj nepoznate količine (tablica 2.).

Zanimljivo je da, ukoliko se od djece zahtijeva da klasificiraju problemske zadatke, ona to rade na isti način, tj. razvrstavaju ih u tri navedene skupine (Morales i sur., 1985.).

Mnogobrojna istraživanja bavila su se razlikama u uspješnosti dječjeg rješavanja pojedinih vrsta problemskih zadataka (Cummins i sur., 1988.; Riley i Greeno, 1988.; Stern i Lehndorfer, 1992.; Verschaffel i sur., 1992.). Vrste se međusobno razlikuju po težini, a unutar pojedine vrste nalaze se zadaci različite težine. Rezultati pokazuju kako su, u pravilu, zadaci kombiniranja najlakši. Njih razmjerno uspješno rješavaju i predškolska djeca. Nešto su teži zadaci promjene, a najteži su zadaci usporedbe. Pritom su zadaci U5 i U6 (tablica 2.) najteži zadaci za sve dječje uzraste.

Već smo spomenuli kako u području problemskih matematičkih zadataka množenja i dijeljenja još nema jedinstvene klasifikacije zadataka, a broj psihologijskih istraživanja u tom području znatno je manji.

No, klasifikacije zadataka i podaci o težini pojedinih vrsta zadataka ne odgovaraju na pitanje zašto su problemski matematički zadaci djeci teški i zašto su neki zadaci teži od ostalih.

4.3. Zašto su problemski zadaci teški?

Neke problemske zadatke djeca uspješno rješavaju još prije škole dok su im drugi teški i u trećem razredu osnovne škole. Mnogobrojna su istraživanja pokušala naći odgovor na pitanje zašto su neki zadaci laki, a drugi teški. Većina istraživanja pronalazila je teorijsko uporište u Piagetovoj teoriji kognitivnog razvoja. Ova teorija govori o razvoju koji prolazi kroz niz univerzalnih faza čiji je redoslijed nepromjenljiv. Svi modeli koji objašnjavaju rješavanje problemskih zadataka uočavaju kako se uradak djece na zadacima mijenja s dobi, tj. s kognitivnim razvojem djeteta. Sazrijevanjem dijete uspješno rješava zadatke koje ranije nije moglo riješiti. Međutim, postoje različite pretpostavke o tome koji kapaciteti svojim razvojem pridonose uspješnijem rješavanju problema. Neki autori drže da je riječ o razvoju

Tablica 2. Vrste problemskih matematičkih zadataka zbrajanja i oduzimanja.

Vrsta zadatka	Primjer zadatka	Nepoznata količina
Kombiniranje		
K1	Ivan ima 3 pikule. Petar ima 5 pikula. Koliko pikula imaju zajedno?	nadskup
K2	Ivan i Petar imaju nekoliko pikula. Ivan ima 3 pikule. Petar ima 5 pikula. Koliko pikula imaju zajedno?	nadskup
K3	Ivan ima 3 pikule. Petar ima nekoliko pikula. Oni zajedno imaju 8 pikula. Koliko pikula ima Petar?	podskup
K4	Ivan ima nekoliko pikula. Petar ima 5 pikula. Oni zajedno imaju 8 pikula. Koliko pikula ima Ivan?	podskup
K5	Ivan i Petar imaju zajedno 8 pikula. Ivan ima 3 pikule. Koliko pikula ima Petar?	podskup
K6	Ivan i Petar imaju zajedno 8 pikula. Ivan ima nekoliko pikula. Petar ima 5 pikula. Koliko pikula ima Ivan?	podskup
Promjena		
P1	Ivan je imao 3 pikule. Onda mu je Petar dao 5 pikula. Koliko pikula ima Ivan sada?	završni skup
P2	Ivan je imao 8 pikula. Onda je dao Petru 5 pikula. Koliko pikula ima Ivan sada?	završni skup
P3	Ivan je imao 3 pikule. Onda mu je Petar dao nekoliko pikula. Sada Ivan ima 8 pikula. Koliko mu je pikula dao Petar?	mijenjajući skup
P4	Ivan je imao 8 pikula. Onda je dao nekoliko pikula Petru. Sada Ivan ima 3 pikule. Koliko je pikula dao Petru?	mijenjajući skup
P5	Ivan je imao nekoliko pikula. Onda mu je Petar dao 5 pikula. Sada Ivan ima 8 pikula. Koliko je pikula Ivan imao u početku?	početni skup
P6	Ivan je imao nekoliko pikula. Onda je dao 5 pikula Petru. Sada Ivan ima 3 pikule. Koliko je pikula Ivan imao u početku?	početni skup
Usporedba		
U1	Ivan ima 8 pikula. Petar ima 5 pikula. Koliko pikula više ima Ivan od Petra?	razlika skupova
U2	Ivan ima 8 pikula. Petar ima 5 pikula. Koliko pikula manje ima Petar od Ivana?	razlika skupova
U3	Ivan ima 3 pikule. Petar ima 5 pikula više od Ivana. Koliko pikula ima Petar?	uspoređeni skup
U4	Ivan ima 8 pikula. Petar ima 5 pikula manje od Ivana? Koliko pikula ima Petar?	uspoređeni skup
U5	Ivan ima 8 pikula. On ima 5 pikula više od Petra. Koliko pikula ima Petar?	referentni skup
U6	Ivan ima 3 pikule. On ima 5 pikula manje od Petra. Koliko pikula ima Petar?	referentni skup

logičko-matematičkih sposobnosti i znanja. Djeca koja su na jednom stupnju matematičko-logičkog razvoja mogu uspješno rješavati samo one zadatke koji su dostupni njihovim kognitivnim shemama. Prelazak na sljedeći stupanj razvoja omogućuje djetetu da, uz prijašnje, rješava i neke nove oblike problemskih zadataka. Tako npr. djeca ne mogu uspješno rješavati zadatke usporedbe dok ne shvate odnos "dio-cjelina", tj. da neki skup može istovremeno biti i podskup drugog skupa.

Drugi autori naglašavaju važnost dječjeg razumijevanja i interpretiranja teksta zadatka. Zanimljive rezultate u prilog ovom gledištu dao je Hudson (1983.) svojim eksperimentom provedenim na djeci mlađe predškolske dobi, predškolcima i učenicima prvog razreda. Hudson je djeci zadavao dva zadatka jednaka po brojčanom izrazu, ali ponešto različitog teksta. Djeca su promatrala slike na kojima su bila prikazana po dva razdvojena skupa elemenata (jedan skup je prikazivao ptice, a drugi crve; jedan skup sačinjavali su lješnjaci, a drugi vjeverice i sl.). Dva skupa razlikovala su se za jedan, dva ili tri elementa. Tekst prvog zadatka glasio je: "*Ovo su neke ptice, a ovo su neki crvi. Koliko je tu više ptica nego crva*?". Tako postavljen zadatak uspješno rješava 64 % učenika prvog razreda (u prosjeku starih 7 godina), 25 % predškolaca (prosječne dobi od 6.3 godine) i 17 % mlađe predškolske djece (4.9 godina starosti). No, drugi oblik zadatka glasio je: "*Ovo su neke ptice, a ovo su neki crvi. Zamisli da ptice lete uokolo i svaka pokušava uloviti jednog crva. Hoće li svaka ptica uloviti crva?... Koliko ptica neće uloviti crva*?". Ovako postavljen zadatak uspješno rješava 100 % učenika prvog razreda, 96 % predškolaca i 83 % djece mlađe predškolske dobi. Na temelju svog ispitivanja Hudson zaključuje kako djeci ne nedostaje matematičko znanje za usporedbu dva skupa, već je riječ o nerazumijevanju teksta zadatka koji traži usporedbu dva skupa ("koliko je više X-a od Y-a?"). Velike promjene u dječjem uratku pri promjeni teksta zadatka ukazuju na važnost verbalnog razumijevanja zadatka.

Još neke dječje pogreške ukazuju na važnost razumijevanja teksta matematičkog problemskog zadatka. Tako npr. djeca izraz "*zajedno*" u tekstu: "*Ivan i Petar imaju zajedno 8 pikula.*" često interpretiraju kao "*svaki*", tj. pridaju tekstu značenje: "*Ivan ima 8 pikula i Petar ima 8 pikula.*". Druga česta pogreška u interpretaciji teksta je da "*koliko više*" u zadatku: "*Ivan ima 8 pikula. Petar ima 5 pikula. Koliko pikula više ima Ivan od Petra*?" djeca protumače kao: "*Koliko pikula ima Ivan*?". Naravno, logična posljedica je odgovor: "*8 pikula*". Jednako tako tekst u zadatku: "*Sanja ima 5 jabuka više nego Ana*" neuvježbana djeca interpretiraju kao: "*Sanja ima 5 jabuka*".

Utvrđeno je da jasniji, eksplicitniji tekst pripomaže točnom rješavanju zadataka. Tako će djeca uspješnije riješiti zadatak ako je postavljen u obliku: "*Lovro i Ana imaju zajedno 9 lješnjaka. Od tih lješnjaka 3 pripadaju Lovri. Ostali pripadaju Ani. Koliko lješnjaka ima Ana*?", nego ako ih se pita: "*Lovro i Ana imaju zajedno 9 lješnjaka. Lovro ima 3 lješnjaka. Koliko lješnjaka ima Ana*?". Na isti način djeca lakše rješavaju zadatak: "*65 djece pije sok. 17 djece pije sok od jabuka. Ostatak djece pije sok od grejpa. Koliko djece pije sok od grejpa*?" nego zadatak: "*65 djece pije sok. 17 djece pije sok od jabuka. Koliko djece pije sok od grejpa*?" (Davis-Dorsey i sur., 1991.). Jasniji tekst pomaže dječjem razumijevanju zadatka, a to onda vodi boljem uratku pri rješavanju postavljenih problemskih zadataka.

Još jedan važan činitelj doprinosi uspješnom rješavanju problemskih zadataka, a to je dječje razumijevanje situacije u zadatku. Nije dovoljno razumjeti jezik, dijete mora točno protumačiti radnju zadatka, mora razumjeti što se zbiva i zašto. Priča zadatka mora biti logična. Rezultati koje su dobile Stern i Lehrndorfer (1992.) potvrđuju ovu pretpostavku. One su 45 učenika prvog razreda podijelile u tri skupine. Sve tri skupine djece rješavale su problemske zadatke identične po brojčanom izrazu, ali različite po tekstu. Prva skupina rješavala je zadatke s usklađenim kontekstom, npr.: "*Petar je Lidijin stariji brat. Zato što je stariji njegova soba je veća i njegove igračke su skuplje od Lidijinih. Petar dobiva veći džeparac od Lidije i on ima novi bicikl dok Lidija vozi Petrov stari bicikl. Dok Petar piše zadaću Lidija šara po svom papiru. Petar ima šest bojica. Lidija ima četiri bojice. Koliko bojica manje ima Lidija od Petra*?". Druga skupina rješavala je zadatke s neusklađenim kontekstom, tj. priča u zadatku nije bila u skladu sa završnom tvrdnjom i pitanjem: "*Petar je Lidijin stariji brat. Zato što je stariji njegova soba je veća i njegove igračke su skuplje od Lidijinih. Petar dobiva veći džeparac od Lidije i on ima novi bicikl dok Lidija vozi Petrov stari bicikl. Dok Petar piše zadaću Lidija šara po svom papiru. Petar ima četiri bojice. Lidija ima šest bojica. Koliko bojica manje ima Petar od Lidije*?". Treća skupina rješavala je situacijski neutralne zadatke, tj. nije bilo prethodnih usporedbi likova u tekstu: "*Lidija i Petar idu u isti razred. Njihova učiteljica je gospođa Horvat. Ona radi mnoge zanimljive stvari zajedno s učenicima. Jučer su bili u Zoološkom vrtu. Danas u školi crtaju životinje. Petar ima šest* *bojica. Lidija ima četiri bojice. Koliko bojica manje ima Lidija od Petra*?". Rezultati pokazuju kako su djeca najuspješnija ukoliko rješavaju zadatke čiji je tekst usklađen sa završnim pitanjem.

Djeci je važno da im priča u zadatku bude bliska. Anand i Ross (1987.) su zadavali učenicima petog i šestog razreda problemske zadatke množenja i dijeljenja. Prva skupina rješavala je zadatke u kojima su se spominjala njihova osobna imena, interesi i hobiji, imena njihovih najboljih prijatelja, nazivi jela i pića koje oni najviše vole. Druga skupina rješavala je zadatke u kojima su se spominjali njima nepoznati ljudi i imenovali konkretni objekti, ali samo kao "kolači" ili "sok". Treća skupina djece rješavala je zadatke u kojima se nisu spominjale osobe, već je neke objekte ili tekućine valjalo podijeliti ili pomnožiti na određen način. Rezultati su pokazali da je najuspješnija skupina učenika koja je rješavala zadatke s osobnim kontekstom, zatim slijedi skupina koja je rješavala zadatke s konkretnim kontekstom, a najslabija je bila skupina čiji su zadaci bili najapstraktniji. Osobni kontekst najviše je koristio djeci srednjih i nižih sposobnosti, dok je uradak visoko sposobnih jednak uz osobni i konkretni kontekst zadataka. Tekst zadatka vezan uz rješavača pomaže djetetu da razumije situaciju u zadatku, a djeca su i motiviranija da rješavaju zadatke u kojima je riječ o njima samima. I odrasli se teže snalaze u situacijama koje su im strane i apstraktne i s kojima imaju malo ili nimalo iskustva. Jednako je s djecom - *bazeni koji se pune i prazne, pa onda treba izračunati vrijeme u kojem će se potpuno napuniti ili potpuno isprazniti* postoje uglavnom samo u problemskim matematičkim zadacima, a vrlo rijetko u dječjem iskustvu. Mogu li djeca uopće takve zadatke povezati sa stvarnošću ili to u "pravoj" matematici nije niti važno?

Možemo zaključiti - problemski su zadaci teški zbog više razloga. Mogu biti teški zato što djeca još nisu razvila neke matematičko-logičke kapacitete nužne za njihovo rješavanje, zato što ne razumiju vrlo složen jezik u zadatku ili zato što ne razumiju situaciju o kojoj govori tekst zadatka.

No postoji još jedan ozbiljan razlog - način školskog poučavanja čini problemske zadatke teškima.

4.4. Kako poučavati problemske zadatke?

Prije škole djeca su već rješavala razne problemske zadatke i to u situacijama koje su bile smislene i razumljive, npr.: "*Ako imam četiri lutke i od bake dobijem još jednu...*" ili "*Ako sam imao 4 pikule, a sad imam 1, u igri sam izgubio....*". Školska matematika poučava računanje s apstraktnim pojmovima (4 + 5 = ?). Kad se pojave problemski zadaci oni služe kao ilustracija zbrajanja ili oduzimanja, a ne kao pravi problemi koje valja rješavati. Ukoliko se trenutno vježba zbrajanje djetetu je jasno da je zbrajanje operacija koju valja izvršiti s brojkama spomenutim u zadatku. Ako se vježba množenje gotovo je sigurno da dva spomenuta broja valja pomnožiti. Vrlo brzo djeca nauče da problemski zadaci nemaju smisla sami za sebe, da situacije o kojima govore nisu stvarne i kako nije nužno razumjeti zadatak da bi ga se uspješno riješilo.

Školske problemske zadatke djeca najčešće tumače kao apstraktne probleme koji zahtijevaju izvođenje nekih operacije sa zadanim brojevima. Znajući da je važno nešto izračunati djeca se ne udubljuju u tekst zadatka i ne razmišljaju što je stvarni odgovor na zadani problem. Tako je moguće da od 97 učenika prvog i drugog razreda njih 76 na zadatak: "*Na brodu je 26 ovaca i 10 koza. Koliko je star kapetan*?" odgovori: "*36 godina*" (Schoenfeld, 1991.). Vrlo je slično tipično dječje odgovaranje na zadatak: "*U toru je 125 ovaca i 5 pasa. Koliko je star pastir*?". Ono glasi: "*125 + 5 = 130, to je previše, ... 125 - 5 = 120, to je isto previše, ... 125 : 5 = 25, to može. Ja mislim da je pastir star 25 godina.*" (Reusser, 1986., prema Schoenfeld, 1991.).

Pravu zabrinutost u američkim stručnim krugovima izazvali su podaci o odgovorima trinaestogodišnjaka na zadatak: "*U vojni autobus stane 36 vojnika. Ako 1128 vojnika valja prebaciti autobusima do odredišta, koliko autobusa je potrebno*?". Otprilike 70 % učenika točno izračuna rezultat (1128 : 36 = 31 i ostatak 12). Međutim, manje od trećine učenika koji su točno izračunali istodobno i točno odgovori na pitanje u zadatku ("*32 autobusa*"). Više od dvije trećine učenika odgovara "*31*" ili "*31 i ostatak 12*" (Silver, 1986.). Očito je kako djeca takve zadatke ne shvaćaju kao prave realistične probleme, već samo kao odgovore brojkama na pitanja koja postavlja "školska" matematika.

Zanimljivi su podaci koji govore da lošiji rješavači problemskih zadataka većinu vremena provedenog na rješavanju zadatka provode gledajući u brojke (57 % vremena). Uspješni rješavači većinu vremena na zadatku provode gledajući u tekst zadatka (67 % vremena) (Verschaffel i DeCorte, 1993.). Ovi nalazi sugeriraju kako dobri rješavači pokušavaju razumjeti u čemu je problem zadatka, dok su oni lošiji orijentirani na matematičke operacije zadanim brojevima.

Ako su problemski zadaci uvijek zadavani uz poučavanje konkretne matematičke operacije (npr. uz dijeljenje), tada i strategija koja je orijentirana isključivo na primjenu matematičke operacije može dovesti do točnog rješenja zadatka. Međutim, na taj način dijete uči da tekst zadatka nije važan. Sljedeći put kad se sličan zadatak pojavi u kontekstu uvježbavanja množenja, vjerojatno će zadane brojke pomnožiti umjesto podijeliti. Kad se sa sličnim problemom susretne u stvarnom životu neće znati odabrati odgovarajuću strategiju rješavanja problema, a manipuliranje brojkama može dovesti do potpuno pogrešnog odgovora.

No, u situacijama koje ne znaju riješiti djeca se mogu pozivati i na iskustvo iz stvarnog života, a ne na školsku matematiku. Zamislite sljedeći zadatak: "*Ivana slavi rođendan. Pripremila je puno sendviča, a jedan vrč pun soka spremila je u hladnjak. Kad je pristigao prvi gost Ivana mu je natočila punu čašu soka. No nakon toga se preplašila da neće imati dovoljno soka za sve goste i odlučila je svakom sljedećem gostu natočiti u čašu pola količine soka koju je dobio prethodni gost. Tako je drugi gost dobio 1/2 čaše soka, sljedeći 1/4 čaše, onaj iza njega 1/8, itd... Zamislite da se sav sok koji je Ivana tako potrošila prelije u čaše. Koliko je soka Ivana ukupno potrošila na svom rođendanu*?" Brzopleti odgovori starijih ispitanika (studenata) glase: "*Otkud znam, kad ne znam koliko je gostiju bilo na rođendanu.*" Ukoliko malo razmisle stariji će ispitanici točno odgovoriti kako se potrošeni sok približava količini od dvije čaše ali je nikad neće dostići (kasni gosti dobivaju po kapljicu ili sljedeći po 1/2 kapljice soka). No Stern i Mevarech (1993.) su pokazale kako djeca na takvo pitanje odgovaraju pozivajući se na svoje vlastito iskustvo s rođendana: "*Ivana je potrošila sav sok koji je imala. Na rođendanima se uvijek popije sav sok.*"

Slične primjere možemo pronaći i u našim udžbenicima. Npr. relativno je lako izračunati točne odgovore na zadatak: "*Učenici jedne škole otišli su na izlet sa 7 autobusa. Koliko je učenika otišlo na izlet, ako je u* *svakom autobusu bilo 60 učenika? Ti isti učenici vratili su se kući sa 10 autobusa. Koliko se učenika nalazilo u svakom autobusu ako znamo da ih je u svakom autobusu bilo jednako mnogo*?" Međutim ovaj zadatak je djeci težak jer nije usklađen s njihovim iskustvom. Sasvim primjeren odgovor devetogodišnjaka glasi: "*Ovo je nemoguće. Ne može se otići na izlet sa 7 autobusa, a vratiti se s 10.*" Obrnuta varijanta je vjerojatnija - otići s 10 autobusa, pa se npr. 3 pokvare i učenici se vrate sa 7 autobusa - ali otići sa 7, a vratiti se s 10 gotovo je nemoguće.

Kao što smo već rekli, poučavanje matematike valjalo bi započeti rješavanjem problemskih zadataka. No zadaci bi trebali biti realistični i usklađeni s dječjim iskustvom. Dječji uradak olakšat će jasan tekst zadatka, uporaba imena djece iz razreda i likovi u zadatku koji su u nekoj međusobnoj vezi (npr. Igor i njegova sestra). Poučavanje valja započeti s takvim zadacima, kako bi djeca na njima lakše uočila elemente bitne za rješenje i uspješnije razvila primjerene strategije rješavanja.

Važno je djecu poučiti svim vrstama problemskih zadataka. Naime, podaci pokazuju kako u udžbenicima prevladavaju najjednostavniji zadaci, tj. zadaci kombiniranja, dok su teži, zadaci usporedbe, relativno rijetki (Verschaffel i DeCorte, 1993.). Poučavanje valja započeti zadacima kombiniranja, ali oni ne smiju biti jedini zadaci koje dijete susreće u početnoj školskoj matematici. Nakon njih valja poučavati i zadatke promjene i zadatke usporedbe. Samo tako možemo osposobiti dijete da u novim situacijama bude uspješno. Jednako tako kad je riječ o problemskim zadacima množenja i dijeljenja djeci valja pokazati, naravno primjerenim redoslijedom, različite vrste zadataka. Nije rijedak slučaj da se "teški" zadaci pojave u ispitu znanja ili na školskom natjecanju, a da djeca nisu imala priliku rješavati takve zadatke u školskom radu.

Dječji uradak u zadacima i razvoj strategija može biti olakšan uporabom konkretnog materijala. Istraživanja pokazuju da su djeca uspješnija ukoliko pri rješavanju zadataka crtaju, rabe štapiće ili kockice. Konkretan materijal kojim se barata značajnije poboljšava uradak mlađe djece, ali je bolji uradak uočen i kod učenika četvrtog razreda osnovne škole (Riley i Greeno, 1988.). Kad je riječ o strategijama rješavanja zadataka djecu valja poučiti različitim načinima prikazivanja. Neki konkretni prikazi više odgovaraju nekim vrstama problemskih zadataka. Tako su, primjerice, dijagrami koji prikazuju odnos dio-cjelina prikladni za zadatke kombiniranja (skup s kockicama u dvije boje, tj. skup od dva podskupa). Zadaci promjene mogu se dobro prikazati pomoću brojevnog pravca. Konkretan prikaz pomoću histograma (npr. dva niza kockica, jedan do drugog) dobar je način za rješavanje zadataka usporedbe.

Uporaba temeljnih kockica može pomoći učiteljici da uvidi strategiju koju djeca rabe pri rješavanju zadataka. Pri rješavanju istog zadatka djeca mogu rabiti međusobno različite strategije. Dobro je da djeca razmijene iskustva, jer će nakon toga poneko dijete otkriti novu strategiju za rješavanje zadataka koju samo ne bi otkrilo. Naravno, neke strategije su uobičajenije, a neke su rijetke. Svako dijete treba imati mogućnost da podijeli svoja i tuđa iskustva u rješavanju zadataka, ali nema neke strategije koja bi bila "najbolja" za svu djecu. To znači da će dijete tijekom rada s kockicama samo odabrati najprikladniji način prikazivanja i rješavanja pojedinog zadatka. Tako se npr. zadatak: "*Ivan je imao 8 kolača. On je dao nekoliko kolača sestri. Sad ima 5 kolača. Koliko je kolača dao sestri?*" može prikazati na više različitih načina: kao stupac od 8 kockica od kojih se odijeli 5 i prebroji ostatak; kao stupac od 5 kockica na koji se nadograđuju kockice do ukupno 8; kao stupac od 5 i do njega stupac od 8 kockica pa se prebrojava razlika među njima; kao stupac od 8 na koji se položi stupac od 5 kockica pa je vidljiva razlika....

Pri prikazivanju zadataka pomoću kockica učiteljica može pozvati djecu da pokažu i objasne različite načine na koje se sve zadatak može prikazati i riješiti. Takve rasprave najbolji su način za učenje novih strategija i uviđanje bitnih odnosa elemenata u zadatku.

4.5. Aktivnosti

1. Gradimo kućice

GRADIVO: Problemski zadaci

RAZRED: Prvi, drugi i treći

SVRHA: Razumijevanje problemskih zadataka, uviđanje mogućih načina kombiniranja elemenata, razvoj matematičkog rezoniranja

BROJ UČENIKA: Podijelite učenike u skupine od po 4 djeteta

PRIBOR: Svaka skupina učenika dobiva po 3 x 30 kockica (tri različite boje) i papir za zapisivanje

UPUTA: "Zamislite da smo mi graditelji koji grade jedno novo selo. Svaka kućica u selu ima prizemlje i prvi kat. Prizemlje i prvi kat kućice mogu biti jednake boje, ali mogu biti i različite boje. Pogledajte, možemo izgraditi kućicu tako da na jednu kockicu postavimo drugu (pokažite). U selu su odlučili da se kućice moraju razlikovati jedna od druge. To znači da u selu ne mogu biti dvije potpuno jednake kućice. Pokušajte izgraditi selo tako da sve kućice imaju prizemlje i prvi kat, ali da je svaka kućica drukčija... Koliko ste različitih kućica izgradili? (9)... Možete li više?"

Promatrajte način njihova rada, pa ćete vidjeti rade li to sustavno ili ne. Pokušajte ih pitati da objasne svoj sistem izgradnje kućica (možda će neka djeca uspjeti razviti sustavan način rada, ali ga neće znati objasniti - potaknite ih i pomozite im).

"Sada razdvojite kockice i vratite ih na sredinu stola. Gradit ćemo novo selo. U ovom selu odlučili su da će sve kućice imati prizemlje i dva kata. To možemo izgraditi tako da stavimo tri kockice jednu na drugu (pokažite). Ali, i u ovom su selu odlučili da svaka kućica mora biti drukčija. Dakle, mi ćemo sada izgraditi selo u kojem će sve kućice imati prizemlje i dva kata, a svaka će kućica biti različita od svih ostalih... Od koliko kućica se sastoji vaše selo? (27)"

VARIJACIJE ZADATKA: Za stariji uzrast (treći i četvrti razred): "Što ako se sastavljaju kućice od 4 kockice? Što ako su te kućice sastavljene od kockica u dvije ili tri boje?"

2. Koliko kolača imamo zajedno?

GRADIVO: Problemski zadaci kombiniranja

RAZRED: Prvi, drugi i treći

SVRHA: Poučavanje rješavanja problemskih zadataka kombiniranja pomoću pomagala (kockice)

BROJ UČENIKA: Podijelite učenike u male skupine od po 4 djeteta

PRIBOR: Jedan papir i 2 puta po 20 kockica (dvije boje) i 40 kockica treće boje.

UPUTA: "Zamislite da su ove kockice pred vama kolači. Ja ću sada zadati neke zadatke, a vi ćete ih prikazati pomoću ovih kockica. Dakle, umjesto kolača vi ćete odbrojiti onoliko kockica koliko vam treba. Kad prikažete zadatak pomoću kockica na papir brojkama zapišite kako ste ga riješili."... Pokušajte svakoj skupini djece zadati zadatak tako da rabite imena djece iz skupine. Naravno, u različitim zadacima uporabite imena svih učenika u skupini.

Prvi zadatak glasi: "Ivan ima 12 kolača. Branka ima 14 kolača. Koliko kolača imaju zajedno? Iskoristite za Ivanove kolače kockice jedne boje, za Brankine kockice druge boje, a za zajedničke kolače kockice treće boje kojih imate najviše... Koliko onda kolača imaju zajedno Ivan i Branka?... Kako ste to prikazali?" Neka djeca koja su to prikazala kao dva skupa, a sumu kao treći skup i zapisala izraz $12 + 14 = 26$ pokažu to i ostalima.

"Prikažite kockicama, zatim zapišite i izračunajte zadatak: Petar ima 11 kolača. Jasna ima nekoliko kolača. Petar i Jasna imaju zajedno 28 kolača. Koliko kolača ima Jasna?"

Ovdje je moguće do razlike doći direktnim oduzimanjem ili pak odbrojavanjem od zajedničkog skupa (to rade mlađa djeca). Ako ima više rješenja neka ih djeca prikažu i rasprave.

"Prikažite sada, zapišite i izračunajte zadatak: Ivan i Jasna imaju zajedno 32 kolača. Ivan ima 15 kolača. Koliko ima Jasna?"

Prodiskutirajte različite prikaze. Potaknite djecu da uvide odnos dio-cjelina, tj. da je jedan skup podskup drugog i da na taj način kockicama prikazuju zadatke.

VARIJACIJE ZADATKA: Rabite manje brojeve za mlađi uzrast, jer cilj nije točno računanje već razjašnjavanje smisla problemskih zadataka.

Pokušajte rabiti i tekst u kojem su sudionici neki vanjski likovi, ali su u međusobnom odnosu, npr.: "Klara i njezina sestra..."

Iskoristite i ostale zadatke kombiniranja.

3. Dobivamo i dajemo kolače

GRADIVO: Problemski zadaci promjene

RAZRED: Prvi, drugi i treći

SVRHA: Poučavanje rješavanja problemskih zadataka promjene pomoću pomagala (kockica)

BROJ UČENIKA: Podijelite učenike u male skupine od po 4 djeteta

PRIBOR: Jedan papir i 2 puta po 20 kockica (dvije boje)

UPUTA: "Zamislite da su ove kockice pred vama kolači. Ja ću sada zadati neke zadatke, a vi ćete ih prikazati pomoću ovih kockica. Dakle umjesto kolača vi ćete odbrojiti onoliko kockica koliko vam treba. Kad prikažete zadatak pomoću kockica onda na papir zapišite brojkama kako ste ga riješili."... Pokušajte svakoj skupini djece zadati zadatak tako da rabite imena djece iz skupine. Naravno, u različitim zadacima uporabite imena svih učenika u skupini.

Prvi zadatak: "Ana je imala 17 kolača. Onda joj je Luka dao 12 kolača. Koliko kolača ima Ana sada? Prikažite kolače koje je Ana imala jednom bojom kockica, a one koje joj je Luka dao drugom bojom. Zapišite kako ste to izračunali." Neka djeca prikažu svoja rješenja. Raspravite ih.

Drugi zadatak: "Petar je imao 22 kolača. Onda je dao Luki nekoliko kolača. Petar sada ima 18 kolača. Koliko kolača je Petar dao Luki? Prikažite to kockicama... Kako ste to prikazali?" Raspravite različite prikaze, koji mogu biti u jednoj ili u dvije boje, mogu biti oduzimanje ili odbrojavanje. Raspravite kako se to može prikazati na razne načine.

Treći zadatak: "Petar je imao nekoliko kolača. Onda mu je Ana dala 18 kolača. Petar sada ima 26 kolača. Koliko je kolača Petar imao u početku? Prikažite kockicama i zapišite na papir kako ste to riješili." Raspravite prikaze i odgovarajuće brojčane izraze.

VARIJACIJE ZADATKA: Koristite manje i veće brojeve, ovisno o razredu.

Pokušajte rabiti i tekst u kojem su sudionici neki vanjski likovi, ali su u međusobnom odnosu, npr.: "Klara i njezina sestra...", "Goran i njegova baka...". Iskoristite i ostale zadatke promjene.

4. Tko ima više kolača?

GRADIVO: Problemski zadaci usporedbe

RAZRED: Prvi, drugi i treći

SVRHA: Poučavanje rješavanja problemskih zadataka usporedbe pomoću pomagala (kockica)

BROJ UČENIKA: Podijelite učenike u male skupine od po 4 djeteta

PRIBOR: Jedan papir i 2 puta po 20 kockica (dvije boje)

UPUTA: "Zamislite da su ove kockice pred vama kolači. Ja ću sada zadati neke zadatke, a vi ćete ih prikazati pomoću ovih kockica. Dakle, umjesto kolača vi ćete odbrojiti onoliko kockica koliko vam treba. Kad prikažete zadatak pomoću kockica na papir brojkama zapišite kako ste ga riješili."... Pokušajte svakoj skupini djece zadati zadatak tako da rabite imena djece iz skupine. Naravno, u različitim zadacima uporabite imena svih učenika u skupini.

Prvi zadatak: "Ivan ima 12 kolača. Sonja ima 19 kolača. Koliko kolača više ima Sonja od Ivana? Prikažite to kockicama i zapišite na papir kako ste riješili zadatak."... Neka djeca usporede različite prikaze. Istaknite prikaz u dva stupca ili dva niza u kojima se mogu direktno usporediti kolači. Raspravite i različite brojčane izraze.

Drugi zadatak: "Petar ima 26 kolača. Ana ima 12 kolača manje od Petra. Koliko kolača ima Ana? Prikažite to kockicama i zapišite račun."... Raspravite prikaze i brojčane izraze.

Treći zadatak: "Sonja ima 14 kolača. Ona ima 11 kolača manje od Ane. Koliko kolača ima Ana? Prikažite kockicama i zapišite račun"... Raspravite prikaze i brojčane izraze.

VARIJACIJE ZADATKA: Koristite manje i veće brojeve, ovisno o razredu.

Pokušajte rabiti i tekst u kojem su sudionici neki vanjski likovi, ali su u međusobnom odnosu, npr.: "Klara i njezina sestra..."

Iskoristite i ostale zadatke usporedbe.

5. Odjenimo Igora i Sanju

GRADIVO: Problemski zadaci (množenje)

RAZRED: Drugi, treći i četvrti

SVRHA: Razumijevanje kombiniranja (Kartezijev produkt) i povezivanje s relacijom "jedan prema više"

BROJ UČENIKA: Podijelite učenike u male skupine od po 4 djeteta

PRIBOR: Jedan papir, 4 različite kockice i tri puta složene po dvije kockice tako da ti skupovi po dvije kockice budu međusobno različiti po boji (npr. dvije crvene jedna na drugoj, dvije zelene jedna na drugoj i dvije žute jedna na drugoj), za svaku skupinu.

Za drugi zadatak 6 različitih jediničnih kockica i 3 različita skupa od po dvije kockice.

UPUTA: Svaka skupina djece dobije na stol papir. Na jednu polovicu papira stave se 4 raznobojne kockice, a na drugu polovicu tri skupa od po dvije spojene kockice (ti skupovi se razlikuju po boji).

Djeci se kaže: "Pogledajte ove 4 raznobojne kockice. To su košulje koje ima dječak po imenu Igor. Igor ima i troje hlače. To su ove kockice koje imate na drugoj polovici papira. Dakle Igor ima četiri košulje i troje hlače. Isprobajte na koliko se mogućih načina Igor može odjenuti. Kada to isprobate zapišite vaše rješenje."... Kad su djeca gotova učiteljica traži da objasne način na koji su došla do rješenja. Dodatno se objasne cijelom razredu ona rješenja u kojima je istaknut odnos "jedan prema više", tj. gdje su djeca uočila da na jedne hlače mogu ići četiri košulje i tako tri puta. Nakon što je istaknut odnos "jedan prema više" zadaje se drugi zadatak. Na papir na stolu stavi se 6 jediničnih kockica i 3 skupa po dvije kockice. Zadatak glasi: "Ovih 6 kockica su bluze jedne djevojčice koja se zove Sanja. Sanja ima i 3 suknje. Na koliko različitih načina se Sanja može odjenuti? Probajte to." Kad su djeca završila sa zadatkom traže se njihova objašnjenja i opet se ističu ona s odnosom "jedan prema više".

VARIJACIJE ZADATKA: U trećem i četvrtom razredu zadajte zadatak s većim (dvoznamenkastim) brojevima.

5.

Literatura

Anand, P.G. i Ross, S.M. (1987.): Using computer-assisted instruction to personalize arithmetic materials for elementary school children. Journal of Educational Psychology, 79, 72-78.

Aschkraft, M.H. (1990.): Strategic processing in children's mental arithmetic. U: Bojrklund, D. (ur.): Children's strategies, Lawrence Erlbaum, Hillsdale.

Balka, D.S. (1995.a): UNIFIX-mathematic activities, Book 1. DIDAX Educational Resources, Rowley.

Balka, D.S. (1995.b): UNIFIX-mathematic activities, Book 2. DIDAX Educational Resources, Rowley.

Baranes, R., Perry, M. i Stigler, J. (1989.): Activation of real-world knowledge in the solution of word problems. Cognition and Instruction, 6, 287-318.

Cook, G., Jones, L., Murphy, C. i Thumpston, G. (1997.): Enriching early mathematical learning. Open University Press, Buckingham.

Cummins, D.D., Kintsch, W., Reusser, K. i Weimer, R. (1988.): The role of understanding in solving word problems. Cognitive Psychology, 20, 405-438.

Davis-Dorsey, J., Ross, S.M. i Morrison, G.R. (1991.): The role of rewording and context personalization in the solving of mathematical word problems. Journal of Educational Psychology, 83, 61-68.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M.S. i Marino, M.S. (1985.): The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. Journal for Research in Mathematics Education, 16, 3-17.

Frydman, O. i Bryant, P.E. (1988.): Sharing and understanding of number equivalence by young children. Cognitive Development, 3, 323-339.

Good, L.T. i Brophy, J. (1995.): Contemporary educational psychology. Longman, New York.

Greer, B. (1992.): Multiplication and division as models of situations. U: Grouws, D. (ur.): Handbook of research on mathematics teaching and learning, 276-295, Macmillan, New York.

Hudson, T. (1983.): Correspondences and numerical differences between disjoint sets. Child Development, 54, 84-90.

Hughs, M. (1986.): Children and number. Blackwell, Cambridge.

Krogh, S.L. (1994.): Educating young children - Infancy to grade three. McGrow Hill, New York.

Morales, R.V., Shute, V.J. i Pellegrino, J. (1985.): Developmental differences in understanding and solving simple mathematics word problems. Cognition and Instruction, 2/1, 41-57.

Nesher, P. (1992.): Solving multiplication word problems. U: Leinhardt, G., Rutnam, R. i Halttrup, R.A. (ur.): Analysis of arithmetic for mathematics teaching, 189-219, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey.

Nunes, T. i Bryant, P. (1996.): Children doing mathematics. Blackwell, Cambridge.

Reisman, F.K. (1982.): Strategies for mathematics disorders. U: Reynolds, C.R. i Gutkin, T.B. (ur.): The handbook of school psychology. Wiley, New York.

Riley, M.S. i Greeno, J.G. (1988.): Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. Cognition and Instruction, 5/1, 49-101.

Riley, M.S., Greeno, J.G. i Heller, J.J. (1983.): Development of children's problem solving ability in arithmetic. U: Ginsburg, H.P. (ur.): The development of mathematical thinking, 153-196, Academic Press, New York.

Saxe, G.B. (1988.): The mathematics of child street vendors. Child Development, 59, 1415-1425.

Schoenfeld, A.H. (1991.): On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. U: Voss, J.F., Parkins, D.N. i Segal, J.W. (ur.): Informal reasoning and education, 311-343, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey.

Siegler, R.S. i Jenkins, E. (1989.): How children discover new strategies, Lawrence Erlabum, Hillsdale, New Jersey.

Silver, E.A. (1986.): Using conceptual and procedural knowledge: A focus on relationship. U: Hiebert, J. (ur.): Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics, 181-198, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey.

Slavin, R.E. (1997.): Educational psychology - Theory and practice. Allyn and Bacon, Boston.

Stern, E. i Lehndorfer, A. (1992.): The role of situational context in solving word problems. Cognitive Development, 7, 259-268.

Stern, E. i Mevarech, Z.R. (1993.): Children's obstacles in understanding abstract mathematical concepts. Neobjavljen rukopis.

Vergnaud, G. (1988.): Multiplicative structures. U: Hiebert, J. i Behr, M. (ur.): Number concepts and operations in the middle grades, 141-161, Erlbaum/Reston, Hillsdale, New Jersey.

Verschaffel, L. i DeCorte, E. (1993.): A decade of research on word-problem solving in Leuven: Theoretical, methodological and practical outcomes. Educational Psychology Review, 3, 239-257.

Verschaffel, L., DeCorte, E. i Pauwels, A. (1992.): Solving compare problems: An eye-movement test of Lewis and Mayer's consistency hypothesis. Journal of Educational Psychology, 84, 85-94.

Wood, D. (1995.): Kako djeca uče i misle. Educa, Zagreb.

POU KORAK PO KORAK

POU KORAK PO KORAK

Vesna Vlahović-Štetić radi kao docent na Katedri za školsku psihologiju psihologiju Filozofskog fakulteta u Zagrebu. Na dodiplomskom i posli studiju izvodi kolegije vezane uz područje učenja i poučavanja. Doktor psihologije stekla je 1996. godine disertacijom o dječjem rješavanju problema. U svom znanstvenom radu bavi se kognitivnim aspektima učenja i poučavanja matematike te područjem darovitosti. U području psihologije obrazovanja objavila je dvadesetak znanstvenih i stručnih radova.

Vlasta Vizek Vidović rođena je i školovala se u Zagrebu gdje je stekla i doktorat znanosti iz područja psihologije 1984 g. Sada je zaposlena u Odsjeku za psihologiju Filozofskog fakulteta u Zagrebu kao redoviti profesor. Voditelj je Katedre za školsku psihologiju, te na dodiplomskom i poslijediplomskom studiju psihologije izvodi nastavu iz područja psihologije obrazovanja. U okviru znanstvenog rada bavi se proučavanjem strategija učenja i poučavanja, posebno u području matematike, kao i proučavanjem motivacijskih činitelja školskog uspjeha. Dosad je objavila pedesetak znanstvenih i stručnih radova iz područja motivacije u učenju i radu, strategija učenja te psiholoških posljedica rata na djecu.

Iz recenzija:

Tekst je neobično koristan, za naše podneblje pravo osvježenje kao približavanje psihološke teorije i nastavne prakse u matematici - dakle području koje je pravi bauk i za učenje i za poučavanje. Sve su opisane aktivnosti vrlo instruktivne za nastavnike, jer pokazuju kako je moguće postupno stvaranje matematičkih pojmova baratanjem konkretnim materijalom i zornim predočivanjem postignutih odnosa. U teoretskom se dijelu iznose rezultati najnovijih i najsuvremenijih spoznaja u kognitivnoj psihologiji. Ovaj tekst valja pozdraviti kao ozbiljan prodor u uspostavljanje veze između psihološke teorije i nastavne prakse i kao konkretan pokušaj temeljenja nastave matematike na znanstvenim spoznajama o razvoju djeteta što je prvi zahtjev razvojno primjerenog kurikuluma i konstruktivističkog pristupa poučavanju.

Prof.dr.sc. Mira Čudina-Obradović

Posebno su istaknuti i obrazloženi psihološki činitelji koji utječu na uspješno učenje matematike te je navedeno kako se sve može pomoći djeci da postignu bolje razumijevanje matematičkih radnji. Dakako, s pravom se naglašava kako je osnovni izvor poteškoća koje se javljaju u učenju matematike nerazumijevanje onoga što se radi, a ono je najčešće posljedica nejasnoća što se javljaju u komunikaciji između djece i poučavatelja, te brzine kojom se želi svladati određeno gradivo.

Prof.dr.sc. Mirko Polonijo

9 789539 749413